Материалы для проведения I (школьного) этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

18 октября 2019 года

Долгопрудный 2019

Сборник содержит материалы для проведения I (школьного) этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н.Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт).

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся **4-11 классов**.

По данным заданиям олимпиада проводится в единые сроки – **18 октября 2019 года**.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник)**,** в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. При проведении олимпиады каждому участнику олимпиады должно быть предоставлено отдельное рабочее место, обеспечивающее **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником.

Время выполнения работы: 4-5 класс – 60 минут, 6-7 класс – 90 минут, 8-11 класс – 120 минут.

Участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Максимальное число баллов, набранное Участником, – 28.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших

	исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

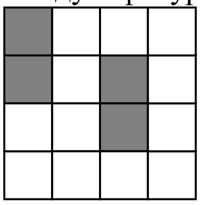
г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия, решения, комментарии

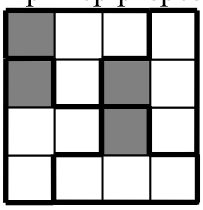
4 класс

4.1. Пять семиметровых брёвен распилили на брёвнышки по 50 см. Сколько распилов было сделано?
Ответ. 65 распилов.
Решение. Из семиметрового бревна получается 14 брёвнышек по 50 см. Чтобы получить 14 брёвнышек, нужно сделать 13 распилов. Значит, общее число распилов равно $13 \cdot 5 = 65$.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 3 балла.

4.2. Разрежьте приведенный клетчатый квадрат на четыре равные клетчатые фигуры так, чтобы в каждую фигуру попало по одной отмеченной клетке.



Решение. Заметим, что каждая из фигур должна содержать 3 клетки.
Пример разрезания показан на рисунке.



Комментарий.
Верный пример без объяснений – 7 баллов.

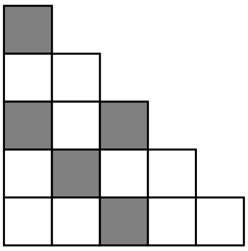
4.3. Используя ровно 6 различных цифр и знаки арифметических действий (плюс, минус, умножить, разделить) получите число 2019. Из цифр можно составлять числа.
Ответ. Например, $2018 + 7 - 6 = 2019$.
Комментарий.
Любой правильный пример – 7 баллов.
Используются одинаковые цифры – 0 баллов.
Замечание. Существуют и другие примеры.

4.4. Петя, Вася и Коля играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. У них спросили: «Кто это сделал?» Петя сказал: «Вася», Вася сказал: «Коля», а Коля ответил: «Не я». Кто мог разбить стекло, если один из ребят сказал неправду, а двое – правду? Найдите все варианты, и объясните, почему других нет.
Ответ. Вася.
Решение. Предположим, что Петя разбил стекло. Тогда Петя и Вася сказали неправду. Значит, этот случай невозможен.
Предположим, что Вася разбил стекло. Тогда Петя и Коля сказали правду, а Вася – неправду. Значит, этот случай возможен.
Предположим, что Коля разбил стекло. Тогда Петя и Коля сказали неправду. Значит, этот случай невозможен.
Таким образом, стекло разбил Вася.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Разобраны не все случаи – не более 4 баллов.

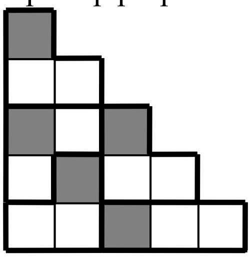
5 класс

5.1. Когда горизонтальную сторону (длину) прямоугольника увеличили на 3 см, его площадь увеличилась на 12 см^2, а когда у получившегося прямоугольника вертикальную сторону (ширину) увеличили на 3 см, его площадь увеличилась на 24 см^2. Найдите площадь исходного прямоугольника.
Ответ. 20 см^2.
Решение. Пусть исходный прямоугольник имел длину a см и ширину b см. Когда длину увеличили на 3 см, площадь увеличилась на $3b$. Значит, $b=4$. У нового прямоугольника площадь увеличилась на 24 см^2, значит, длина нового прямоугольника равна 8 см. Поэтому у исходного прямоугольника длина равна $a=8-3=5$ см. А площадь равна $ab=20$ см^2.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 2 балла.

5.2. Разрежьте приведённую клетчатую фигуру на пять клетчатых фигурок равной площади, среди которых ровно четыре одинаковые, так, чтобы в каждую фигурку попало по одной отмеченной клетке.



Решение. Заметим, что каждая из фигурок должна содержать 3 клетки.
Пример разрезания показан на рисунке.



Комментарий.
Верный пример без объяснений – 7 баллов.

5.3. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. У них спросили: «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша сказал: «Не знаю». Потом выяснилось, что двое из них сказали правду, а двое неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло?
Ответ. Знает.
Предположим, что Миша не знает, кто разбил стекло. Тогда он сказал правду. И еще двое из ребят тоже сказали правду. Значит, этот случай невозможен.
Поэтому Миша знает, кто разбил стекло.
Заметим, что такая ситуация возможна. Миша сказал неправду. А стекло разбил Петя, Вася или Коля. И двое из них сказали правду, а один (разбивший стекло) неправду.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Замечание. В решении не требуется приводить пример ситуации, в которой Миша сказал неправду. Достаточно доказать, что ситуация, в которой Миша не знает, кто разбил стекло, невозможна по условию.

5.4. У Вики было три ромашки: с 31 лепестком, с 32 лепестками и с 33 лепестками. Она оборвала 20 лепестков. Могло ли получиться так, что количество лепестков на ромашках стало равным?

Ответ. Не могло.

Решение. Если бы количество лепестков на ромашках стало равным, то количество оставшихся лепестков делилось бы на 3. Но осталось $31+32+33-20=76$ лепестков. А 76 на 3 не делится.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

6 класс

6.1. Когда горизонтальную сторону (длину) прямоугольника увеличили на 3 см, его площадь увеличилась на 21 см^2, а когда у получившегося прямоугольника вертикальную сторону (ширину) уменьшили на 3 см, его площадь уменьшилась на 60 см^2. Найдите площадь исходного прямоугольника.

Ответ. 119 см^2.

Решение. Пусть исходный прямоугольник имел длину a см и ширину b см. Когда длину увеличили на 3 см, площадь увеличилась на $3b$. Значит, $b=7$. У нового прямоугольника площадь уменьшилась на 60 см^2, значит, длина нового прямоугольника равна 20 см. Поэтому у исходного прямоугольника длина равна $a=20-3=17$ см. А площадь равна $ab=119$ см^2.

Верный ответ без обоснования – 2 балла.

6.2. Петя сложил подряд идущие нечётные числа от 1 до 2019: $1+3+5+\ldots+2019$, а Коля сложил все чётные числа от 2 до 2018: $2+4+6+\ldots+2018$. У кого из ребят сумма больше и на сколько?

Ответ. У Пети сумма больше на 1010.

Решение. Найдем разность сумм Пети и Коли: $(1+3+5+\ldots+2019)-(2+4+6+\ldots+2018)=$

$(2019-2018)+(2017-2016)+\ldots+(5-4)+(3-2)+1=1+1+\ldots+1+1=1010$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано только, что у Пети сумма больше – 2 балла.

Все верно, но из-за арифметической ошибки ответ отличается от правильного на 1 – 5 баллов.

6.3. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. У них спросили: «Кто это сделал?» Петя ответил: «Не я», Вася ответил: «Коля или Миша», Коля ответил: «Вася», а Миша сказал: «Коля». Потом выяснилось, что трое из них сказали правду, а один неправду. Кто мог разбить стекло?

Ответ. Коля.

Решение. Предположим, что Петя разбил стекло. Тогда все сказали неправду. Значит, этот случай невозможен.

Предположим, что Вася разбил стекло. Тогда Вася и Миша сказали неправду. Значит, этот случай невозможен.

Предположим, что Коля разбил стекло. Тогда Коля сказал неправду, а остальные ребята – правду. Значит, этот случай возможен.

Предположим, что Миша разбил стекло. Тогда Коля и Миша сказали неправду. Значит, этот случай невозможен.

Таким образом, стекло разбил Коля.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Разобраны не все случаи – не более 4 баллов.

6.4. У Вики было четыре ромашки: с 31 лепестком, с 32 лепестками, с 33 лепестками и с 34 лепестками. Она оборвала 20 лепестков. Могло ли получиться так, что количество лепестков на ромашках стало равным?

Ответ. Не могло.

Решение. Если бы количество лепестков на ромашках стало равным, то количество оставшихся лепестков делилось бы на 4. Но осталось $31+32+33+34-20=110$ лепестков. А 110 на 4 не делится.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7 класс

7.1. Найдите значение выражения $1+2-3-4+5+6-7-8+\ldots-2019$.
Ответ. 0.
Решение. Вычтем и добавим в конце выражения число 2020. Тогда первые 2020 чисел разобьются на $2020:4=505$ четвёрок. И в каждой четвёрке сумма чисел будет равна -4. Тогда значение выражения будет равно $(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\ldots-2019-2020)+2020=505\cdot(-4)+2020=0$.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.2. Когда и длину, и ширину прямоугольника увеличили на 3 см, его площадь увеличилась на 48 см^2. Найдите периметр получившегося прямоугольника.
Ответ. 26 см.
Решение. Пусть исходный прямоугольник имел длину a см и ширину b см. Тогда у нового прямоугольника длина равна $a+3$ см, а ширина равна $b+3$ см. Из условия следует, что $(a+3)(b+3)-ab=48$, тогда $3(a+b)=39$, $a+b=13$. Значит, периметр равен 26 см.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 2 балла.
Найден полупериметр – 5 баллов.

7.3. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. У них спросили: «Кто это сделал?» Петя ответил: «Не я», Вася ответил: «Я», Коля ответил: «Петя», а Миша сказал: «Не Вася». Какое максимальное количество детей могли сказать правду?
Ответ. Двое.
Решение. Заметим, что Петя и Коля одновременно не могли сказать правду. Также одновременно не могли сказать правду Вася и Миша. Поэтому сказавших правду не более двух.
Двое могли сказать правду, например, в такой ситуации. Стекло разбил Петя. Тогда Вася и Петя сказали неправду, а Коля и Миша – правду.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что сказавших правду не больше двух – 4 балла.
Приведен пример ситуации, в которой правду сказали двое – 3 балла.

7.4. На складе стеклотары могут храниться только банки по 0,5 л, 0,7 л и 1 л. Сейчас на складе имеется 2500 банок общей вместимостью 2000 л. Докажите, что на складе есть хотя бы одна пол-литровая банка.
Решение. Предположим, что на складе хранятся только банки по 0,7 л и 1 л. Пусть банок по 0,7 л будет *x*, тогда банок по 1 л будет $2500-x$. Их общая вместимость равна $0{,}7x+(2500-x)=2000$. Из этого уравнения получаем, что $500=0{,}3x$. Откуда x – не целое. Значит, на складе есть хотя бы одна пол-литровая банка.
Комментарий.
Приведен пример ситуации, в которой на складе есть пол-литровая банка – 0 баллов.

8 класс

8.1. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 18:00 проехал в 1,3 раза больший путь, чем к 17:00. Когда поезд выехал?

Ответ. 13:40.

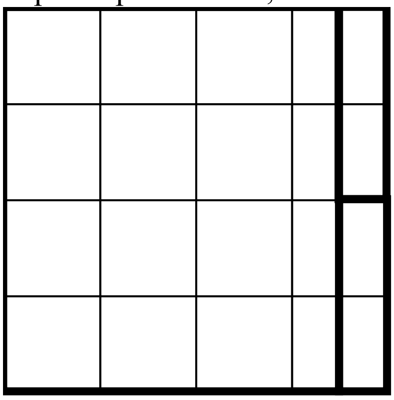
Решение. Пусть до 17:00 поезд проехал x км. Тогда за один час (с 17:00 до 18:00) он проехал $(1,3-1)x = 0,3x$ км. Тогда x км он проедет за $\frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$ часа, то есть за 3 часа 20 минут. Значит, поезд выехал в 13:40.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 2 балла.

8.2. Разрежьте квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см.

Решение. Один из примеров показан на рисунке. Квадрат разрезан на три прямоугольника с периметрами 15 см, 5 см и 5 см.



Комментарий.

Любой верный пример – 7 баллов.

8.3. Винни-Пух шел по лесу с 20-килограммовым бочонком мёда. Первому встречному он отдал $\frac{1}{2}$ часть мёда, второму – $\frac{1}{3}$ от оставшегося мёда, третьему – $\frac{1}{4}$ от оставшегося мёда, …, девятому – $\frac{1}{10}$ от оставшегося мёда. Сколько мёда осталось у Винни-Пуха?

Ответ. 2 кг.

Решение. Когда Вини–Пух отдает $\frac{1}{k}$-ю часть мёда, у него остается $1-\frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$-я часть . То есть после первой встречи у него осталась $\frac{1}{2}$ часть исходного мёда. После второй встречи – $\frac{2}{3}$ от $\frac{1}{2}$, то есть $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Рассуждая аналогично, получим, что после девятой встречи у него осталось $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ часть исходного мёда, то есть 2 кг.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 2 балла.

8.4. В треугольнике ABC медиана BM перпендикулярна биссектрисе AP. Найдите угол ABC, если известно, что угол $\angle BAP = 30°$.

Ответ. $\angle ABC = 90°$.

Решение. Заметим, что $\angle BAM = \angle BAC = 60°$. Пусть H – точка пересечения BM и AP. Тогда AH – биссектриса и высота треугольника BAM. Следовательно, $BA = AM$. Поэтому треугольник BAM – равносторонний, и тогда $AB = BM = MA = MC$. Тогда в треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны, к которой она проведена. Поэтому $\angle ABC = 90°$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что треугольник BAM – равносторонний (или $AM = BM$) – 4 балла.

9 класс

9.1. Выберите три различных цифры так, чтобы среди трёхзначных чисел, которые из них можно составить, оказались числа, делящиеся на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.
Решение. Выберем цифры 0, 3 и 6. Тогда число 360 делится на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и на 10, а число 630 – на 7.
Комментарий.
Верный набор цифр без обоснования того, что он подходит – 4 балла.

9.2. Даны три числа. Если бы первое из них увеличили на 40%, а второе – на 20%, то сумма всех трёх чисел увеличилась бы на 2,5; если бы второе число увеличили на 40%, а третье – на 20%, то сумма увеличилась бы на 5; наконец, если бы третье число увеличили на 40%, а первое – на 20%, то сумма увеличилась бы на 4,5. Какой могла быть сумма трёх исходных чисел?
Ответ. 20.
Решение. Пусть исходные числа равны x, y, z. Тогда из условия задачи следует, что $0,4x+0,2y=2,5$, $0,4y+0,2z=5$ и $0,2x+0,4z=4,5$. Сложив уравнения, получим $0,6(x+y+z)=12$, откуда искомая сумма равна 20.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 2 балла.
Замечание. Можно найти сами числа: $x=2,5,\ y=7,5,\ z=10$.

9.3. Дан прямоугольный треугольник *ABC* (угол *B* – прямой). Окружность с центром в точке *B* проходит через точку *A* и пересекает сторону *AC* в точке *D*. Пусть *E* – середина стороны *BC*. Найдите углы треугольника *ABC*, если известно, что угол *DEC* – прямой.
Ответ. $\angle BAC=60°, \angle BCA=30°$.
Решение. Из условия следует, что в треугольнике *BDC* отрезок *DE* является одновременно медианой и высотой. Значит, этот треугольник – равнобедренный и $CD=BD$. Отрезок *ED* является средней линией треугольника *BCA*, так как он проходит через середину стороны *BC* и параллелен стороне *BA* (углы *CED* и *CBA* равны). Значит, $AD=CD=DB$. Но из условия следует, что $BA=BD$. Значит, треугольник *ADB* – равносторонний, и потому угол *DAB* равен $60°$.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что треугольник *BDC* – равнобедренный – 2 балла.

9.4. Дискриминант трехчлена $f(x)=ax^2+2bx+c$ равен дискриминанту трехчлена $g(x)=(a+1)x^2+2(b-2)x+c+4$. Найдите значение $f(2)$.
Ответ. $f(2)=0$.
Решение. Запишем равенство дискриминантов: $(2b)^2-4ac=(2(b-2))^2-4(a+1)(c+4)$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем: $4(4a+4b+c)=0$. Но тогда $f(2)=a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=4a+4b+c=0$.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Получено равенство вида $4(4a+4b+c)=0$ – 4 балла.

10 класс

10.1. По двум перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями в сторону перекрестка едут две машины A и B (A – по одной дороге, B – по другой). Когда A достигла перекрёстка, расстояние между машинами было 300 м. Когда после этого B в момент времени T достигла перекрёстка, расстояние между машинами стало 200 м. Какое расстояние будет между машинами, когда машина B проедет еще 300 м после момента времени T?

Ответ. 500 м.

Решение. Из условия следует, что пока машина B преодолела 300 м до перекрёстка, машина A отъехала от перекрёстка на 200 м. Значит, когда машина B проедет ещё 300 м, машина A проедет ещё 200 м, и будет на расстоянии 400 м от перекрёстка. По теореме Пифагора расстояние между машинами в этот момент будет равно 500 м.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 2 балла.

10.2. Можно ли выбрать три различных цифры так, чтобы среди трёхзначных чисел, которые из них можно составить, оказались числа, делящиеся на 3, 5 и 11?

Ответ. Можно.

Решение. Выберем цифры 5, 7 и 9. Тогда число 975 делится на 3 и на 5, а число 957 – на 11.

Комментарий.

Только ответ «можно» – 0 баллов.

Верный набор цифр без обоснования того, что он подходит – 4 балла.

10.3. На стороне *AC* треугольника *ABC* выбрана точка *D*. Точка *H* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *D* на сторону *BC*. Точка *M* – середина стороны *AB*. Известно, что точки *B, M, D, H* лежат на одной окружности. Докажите, что угол *BDC* в два раза больше угла *BAC*.

Решение. Из того, что угол *BHD* – прямой, а точки *B, M, D, H* лежат на одной окружности, следует, что угол *BMD* также прямой (сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180°$). Значит, отрезок *DM* является одновременно медианой и высотой треугольника *ADB*. Следовательно, этот треугольник – равнобедренный и его углы *BAD* и *ABD* равны. А тогда угол *BDC*, равный сумме этих углов (теорема о внешнем угле треугольника) будет в два раза больше одного из них, то есть угла *BAC*.

Комментарий.

Доказано, что угол *BMD* прямой – 3 балла.

10.4. Решите уравнение: $(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)+\ldots-(x+2018)(x+2019)=0$.

Ответ. $x=-1010$.

Решение. Разобьем слагаемые на пары и вынесем общие множители:

$$\big((x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)\big)+\big((x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)\big)+\ldots-(x+2018)(x+2019)\big)=$$

$$\big((x+1)-(x+3)\big)(x+2)+\big((x+3)-(x+5)\big)(x+4)+\ldots+\big((x+2017)-(x+2019)\big)(x+2018)=$$

$$(-2)\big((x+2)+(x+4)+\ldots+(x+2018)\big)=(-2)\left(1009x+\frac{2+2018}{2}\cdot 1009\right)=$$

$(-2)\cdot 1009\cdot(x+1010)=0$. Отсюда $x=-1010$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Слагаемые разбиты на пары – 2 балла.

Арифметическая ошибка при суммировании арифметической прогрессии – снять 1 балл.

11 класс

11.1. По двум перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями в сторону перекрёстка едут две машины А и В (А – по одной дороге, В – по другой). Когда А достигла перекрёстка, расстояние между машинами было 500 м. Когда после этого В в момент времени Т достигла перекрёстка, расстояние между машинами стало 600 м. Какое расстояние будет между машинами, когда машина А проедет еще 600 м после момента времени Т?
Ответ. 1300 м.
Решение. Из условия следует, что пока машина В преодолела 500 м до перекрёстка, машина А отъехала от перекрестка на 600 м. Значит, когда машина А проедет ещё 600 м, и будет на расстоянии 1200 м от перекрёстка, машина В проедет дополнительно 500 м. По теореме Пифагора расстояние между машинами в этот момент будет равно 1300 м.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.2. Даны три числа. Если бы первое из них увеличили на 10%, а второе – на 20%, то сумма всех трех чисел увеличилась бы на 1; если бы второе число увеличили на 10%, а третье уменьшили на 10%, то сумма уменьшилась бы на 0,5; наконец, если бы третье число увеличили на 40%, а первое – на 20%, то сумма увеличилась бы на 4. Какой могла быть сумма трёх исходных чисел?
Ответ. 15.
Решение. Пусть исходные числа равны x, y, z. Тогда из условия задачи следует, что $0{,}1x+0{,}2y=1$, $0{,}1y-0{,}1z=-0{,}5$ и $0{,}2x+0{,}4z=4$. Сложив уравнения, получим $0{,}3(x+y+z)=4{,}5$, откуда искомая сумма равна 15.
Комментарий.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Ответ получен подбором одной тройки решений – 3 балла.
Замечание. Троек чисел x, y, z, удовлетворяющих условию, бесконечно много.

11.3. Можно ли выбрать четыре различных цифры так, чтобы среди четырёхзначных чисел, которые из них можно составить, оказались числа, делящиеся на 9, 10 и 11?
Ответ. Можно.
Решение. Выберем цифры 0, 3, 6 и 9. Тогда число 9630 делится на 9 и на 10, а число 9603 – на 11.
Комментарий.
Только ответ «можно» – 0 баллов.
Верный набор цифр без обоснования того, что он подходит – 4 балла.

11.4. Дана треугольная пирамида *SABC*. Пусть *SM* и *SK* – медианы треугольников *ASC* и *BSC* соответственно. Докажите, что если углы *MSC* и *KSC* – прямые, то прямые *SC* и *AB* перпендикулярны.
Решение. Проведём плоскость через пересекающиеся прямые *SM* и *SK*. По условию прямая *SC* перпендикулярна этим прямым. Значит, она перпендикулярна этой плоскости. Но тогда она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности прямой *MK*. Угол между прямыми *SC* и *MK* оказался прямым. Но прямая *MK* параллельна прямой *AB* (*MK* – средняя линия треугольника *ACB*). Значит, угол между прямыми *SC* и *AB* – также прямой. Значит, эти прямые – перпендикулярны.
Комментарий.
Доказано, что угол между прямыми *SC* и *MK* прямой – 3 балла.