Задача 1.9.1. Леопольд атакует (10 баллов). Кот Леопольд, находясь на крыше дома, два раза выстрелил в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями камушками из рогатки. Перед падением на землю скорости камушков были направлены перпендикулярно друг другу. Определите высоту h дома, если известно, что суммарное время полёта камушков $t_0 = 3\,\text{с}$, а времена их движения отличаются в два раза. С какой скоростью υ камушки были выпущены из рогатки? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Возможное решение (фольклор). Скорости камушков при падении на землю одинаковы (это следует, например, из закона сохранения энергии) и равны u. Суммарная траектория камушков представляет собой параболу из симметрии которой следует, что они упали на землю под углом 45° к горизонту.

Суммарное время полёта камушков

$$t_0 = \frac{2u\sin 45^\circ}{g}. \qquad (1)$$

Время полёта камушка, двигавшегося меньшее время $t_1 = t_0/3$, а его вертикальное перемещение

$$h = ut_1 \sin 45^\circ - \frac{gt_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя u из (1), получим

$$h = \frac{gt_0^2}{9} = 10\,\text{м}.$$

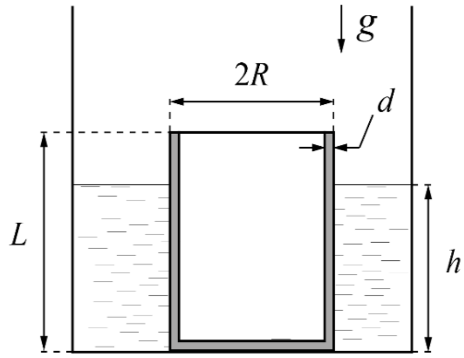
Из кинематики равноускоренного движения следует

$$u^2 = \upsilon^2 + 2gh,$$

Откуда следует $\upsilon = gt_0\sqrt{\frac{5}{18}} \approx 15{,}8\,\text{м/с}$.

№	**Задача 1.9.1. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Обосновано, что камушки упали на землю под углом 45° к горизонту	2
2	Формула для суммарного времени полёта камушков	2
3	Формула для высоты дома	2
4	Дан числовой ответ для h	1
5	Формула для начальной скорости	2
6	Дан числовой ответ для υ	1

Задача 1.9.2. Тяжелый стакан (10 баллов). Внешний радиус цилиндрического стакана, находящегося в высоком аквариуме с шероховатым дном, равен R, высота L, толщина стенок и дна d (см. рис.). Сверху стакан герметично закрыт тонким легким диском радиуса R. Плотность жидкости в аквариуме ρ, плотность материала стакана 20ρ.



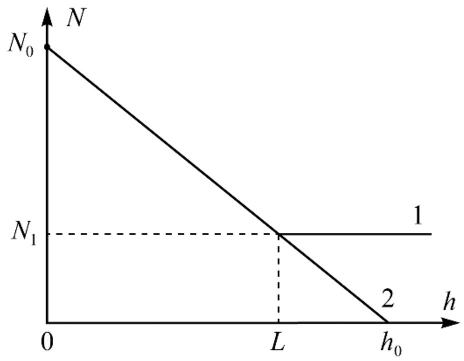
1. Получите зависимость силы реакции N, с которой стакан действует на дно аквариума, от уровня h налитой в аквариум жидкости. Постройте график зависимости $N(h)$. Укажите на графике характерные точки, выразив их через величины, заданные в условии.

2. При каком соотношении между d и L стакан может всплыть? Считайте, что R фиксировано и выполняется условие $0 < d \leq 0,040R$.

Возможное решение (С. Кармазин). На стакан массы m вниз действует сила тяжести, а вверх – сила Архимеда $F_A = \rho g \pi h R^2$ и сила реакции опоры, равная силе N, с которой стакан давит на дно аквариума. Следовательно, $N = mg - F_A$.

1. Учитывая, что толщина стенки мала по сравнению с радиусом стакана, вычислим ее объем упрощенно – как объем листа, из которого свернут цилиндр высотой L. Объем дна также запишем упрощенно – как произведение внешней площади дна стакана на его толщину. При этом мы дважды учтем тонкое кольцо квадратного сечения $d \cdot d$ и радиуса R, которое находится на стыке дна и стенки. Однако, оценка показывает, что при самой толстой из допустимых по условию стенок стакана объем этого кольца не превысит 8% от объема дна, рассчитанного точно с использованием площади внутреннего сечения стакана. С учетом суммарного объема стенок и дна стакана вносимая указанными упрощениями погрешность будет заметно меньше 8%.

Итак,
$$N = 20\pi\rho g d R(2L + R) - (\pi \rho g R^2)h. \qquad (1)$$



2. График зависимости $N(h)$ приведён на рисунке.
Проанализируем равенство (1) и график.
Угловой коэффициент $\frac{\Delta N}{\Delta h} = \pi \rho g R^2$ прямой на графике не зависит ни от d, ни от L.
Обозначения на графике:

$$N_0 = 20\pi\rho g d R(2L + R)$$
$$h_0 = \frac{20d(2L+R)}{R} \qquad (2)$$
$$N_1 = \pi g R \rho(40dL + 20dR - RL).$$

Если уровень воды в аквариуме достигает верха стакана, а стакан к этому моменту еще не всплыл, то зависимость изображается на графике линией 1. Условие реализации такого сценария $L < h_0$. Казалось бы, что для всплытия стакана (прямая 2 на графике) достаточно увеличивать L. Но при этом будут возрастать и N_0 и h_0, т. к. как угловой коэффициент прямой остаётся постоянным. Возможность всплытия стакана будет определяться тем, какая величина, L или h_0, при увеличении L будет быстрее смещаться вправо по оси h. Стакан всплывет, если L превысит h_0. Для этого должно выполняться условие

$$L \geq h_0 \text{ или } L \geq \frac{20d(2L+R)}{R}$$

Окончательно, после преобразований, условие плавания стакана примет вид:

$$L \geq \frac{20dR}{R - 40d}. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что если второе слагаемое в знаменателе равно или больше R, то не существует такого L, при котором стакан мог бы всплыть. При увеличении L всплытие возможно лишь в том случае, если

$$d < \frac{R}{40} \quad \text{или } d < 0{,}025R \qquad (4)$$

Данное неравенство подтверждает допустимость сделанных в начале решения упрощений.
Ответы по пунктам:

1. $N = 20\pi\rho g d R(2L + R) - (\pi \rho g R^2)h$

Характерные точки:

- $N_0 = 20\pi\rho g d R(2L + R)$
- $h_0 = \frac{20d(2L+R)}{R}$,
- $N_1 = \pi g R\rho(40dL + 20dR - RL)$.

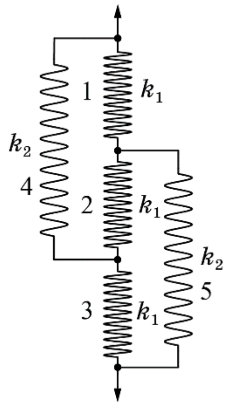
График 1 реализуется в случае, если $L < h_0$, или $L < \frac{20dR}{R-40d}$ т.е. для не очень высоких стаканов.

3. Всплытие стакана может произойти, если $L \geq \frac{20dR}{R-40d}$, но это возможно лишь при достаточно тонких стенках стакана $d < 0{,}025R$.

№	**Задача 1.9.2. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Получена зависимость $N(h)$	2
2	Представлен график (по 1 баллу за каждую ветвь из двух возможных)	2
3	Указаны значения характерных точек (по 1 баллу за каждую из 3 точек (N_0, N_1, h_0), равенства (2))	3
4	Сформулировано условие плавания стакана (3)	1
5	Указано, что плавание стакана возможно лишь при выполнении условия (4)	2

Задача 1.9.3. Пять пружинок (10 баллов). Пять пружинок соединены так, как показано на рисунке, и в исходном состоянии ни одна из них не деформирована. Коэффициенты жесткости трех пружин равны k_1, а двух оставшихся – k_2.

1) Чему равен эффективный коэффициент жесткости системы пружин?
2) Систему растягивают, прикладывая к ее концам одинаковые силы. При каком соотношении k_1 и k_2 пружина 2 окажется сжатой?



Возможное решение. Пусть удлинение пружин 1 и 3 равно x (из симметрии следует, что удлинения одинаковы), а пружины 2, соответственно, y. Тогда пружины 4 и 5 растянуты на $x+y$. Рассмотрим силы, приложенных к точке соединения пружин 1, 2 и 5:

$$F_1 = F_2 + F_5; \text{ или } k_1x = k_1y + k_2\left(x+y\right). \qquad (1)$$

Отсюда

$$y = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}x. \qquad (2)$$

Если при положительных x удлинение $y<0$, то это означают, что пружина 2 сжата. Это возможно при $k_2 > k_1$. Если $k_2 < k_1$, то пружина 2 растянута. При $k_2 = k_1$ пружина не деформирована.

Общее увеличение длины системы пружин $\Delta l = 2x + y = \dfrac{3k_1 + k_2}{k_1 + k_2}x.$

Приложенная к концам системы сила

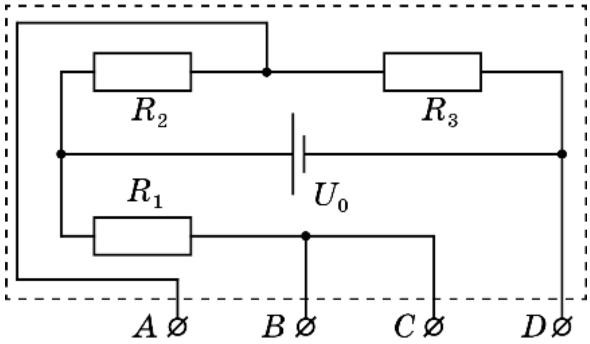
$$F = F_1 + F_4 = k_1x + k_2\left(x+y\right) = k_1x + k_2\frac{2k_1}{k_1+k_2}x = k_1\frac{k_1+3k_2}{k_1+k_2}x.$$

Эффективный коэффициент жесткости

$$k = \frac{F}{\Delta l} = k_1\frac{k_1+3k_2}{3k_1+k_2}.$$

№	Задача 1.9.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Отмечено, что удлинение пружин 1 и 3 одинаково	1
2	Условия равновесия точек соединения трёх пружин	2
3	Связь удлинений крайних и пружины 2 – уравнение (2)	2
4	Сделан вывод о соотношении k_1 и k_2 при котором пружина 2 сжата	2
5	Определен коэффициент жесткости всей системы	3
	Записано условие $F = F_1 + F_4$ (1 балл)	
	Учтена кинематическая связь $\Delta l = 2x + y$ (1 балл)	
	Записан ответ (1 балл)	

Задача 1.9.4. «Серый ящик» (20 баллов). В «сером» ящике собрана электрическая цепь схема которой приведена на рисунке. К клеммам *AB* ящика подключают идеальный вольтметр, а к клеммам *CD* – различные резисторы, сопротивления которых в *n* раз больше, чем у резистора R_1. Зависимость показаний вольтметра *U* от *n* представлена в таблице.



U, В	2,2	3,9	5,0	5,4	6,2	6,5	6,9
n	1	2	3	4	5	7	8

Задание:

1. Выведите формулу теоретической зависимости $U(n)$.
2. Постройте график зависимости $U(n)$ по данным таблицы.
3. Определите напряжение U_0 источника и отношение $k = R_3 / R_2$. Для этого можете либо:
   - осуществить линеаризацию зависимости $U(n)$, т.е. найти такую функцию $z(n)$, для которой зависимость $U(z)$ является линейной и построить её график, по которому определить U_0 и *k*. (За такой вариант решения этого пункта вы получите до 12 баллов).
   - использовать две пары значений из таблицы и уравнение, полученное в пункте 1 задания. Выбор значений *U* и *n* для расчета необходимо обосновать с помощью графика, построенного в пункте 2 задания. (За такой вариант решения этого пункта вы получите до 8 баллов).

Примечание: баллы за разные способы решения пункта 3 не суммируются!

Возможное решение (С. Кармазин).

Сила тока через резисторы R_2 и R_3 равна $I_1 = U_0 / (R_2 + R_3)$. Напряжение на резисторе R_3 (напряжение между точками 0 и 1) равно

(1) $$U_{01} = I_1 R_3 = \frac{U_0 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{kU_0}{1+k}.$$

Аналогично, напряжение на резисторе nR_1 (между точками 0 и 2) равно

(2) $$U_{02} = \frac{nR_1 U_0}{R_1 + nR_1} = \frac{nU_0}{1+n}.$$

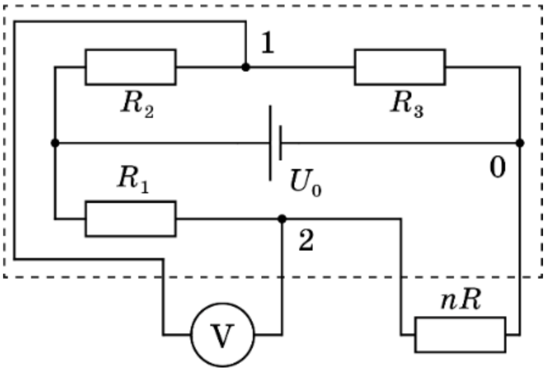


Рис. 1

Показание U вольтметр (напряжение между точками 1 и 2), равно разности U_{02} и U_{01}. Знак этой разности не имеет значения (всегда можно поменять полярность подключения вольтметра).

(3) $$U = \frac{nU_0}{1+n} - \frac{kU_0}{1+k}.$$

1. График зависимости $U(n)$ представлен на рис.2.

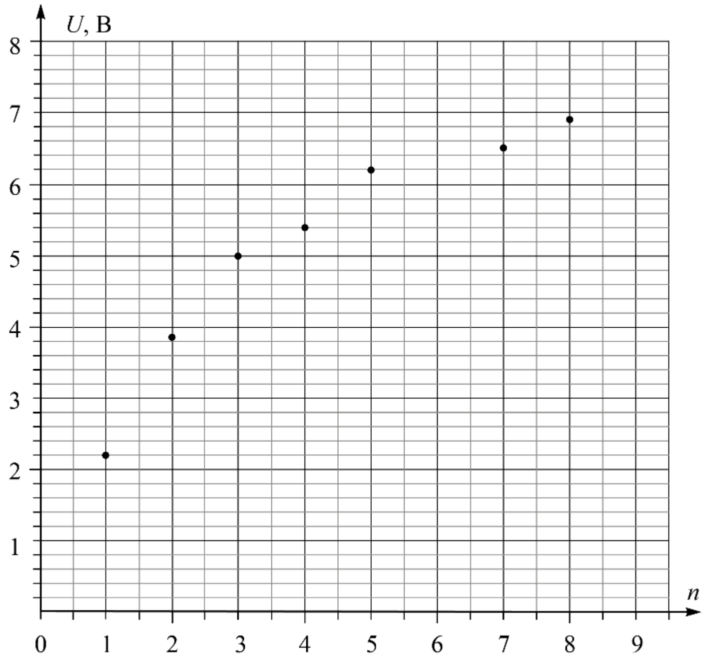


Рис. 2

2. Визуальный анализ графика на рис. 2 позволяет предположить, что точки при $n = 4$ и $n = 7$ лежат несколько ниже общего тренда зависимости $U(n)$. Вычислим искомые величины, используя, например, значения U для $n = 2$ и $n = 5$.

С помощью (3) и табл.1 получаем 2 линейных уравнения с двумя неизвестными:

(4) $$3{,}85\ \text{В} = \frac{2}{3}U_0 - \frac{kU_0}{1+k}.$$

(5) $$6{,}20\ \text{В} = \frac{5}{6}U_0 - \frac{kU_0}{1+k}.$$

Решая совместно уравнения (4) и (5) находим: $U_0 \approx 14\ \text{В}$; $k \approx 0{,}7$.

3. Проводить сложные математические преобразования для линеаризации зависимости $U(n)$ нет необходимости. Из (3) видно, что функция $z(n)$ имеет вид $z = n/(1+n)$.

Для построения зависимости $U(z)$ дополним таблицу в условии значениями $n/(1+n)$.

U, В	2,20	3,85	5,00	5,40	6,20	6,50	6,90
n	1	2	3	4	5	7	8
$\frac{n}{1+n}$	0,5	0,67	0,75	0,8	0,83	0,88	0,89

4.

троим график $U\left(\frac{n}{1+n}\right)$.

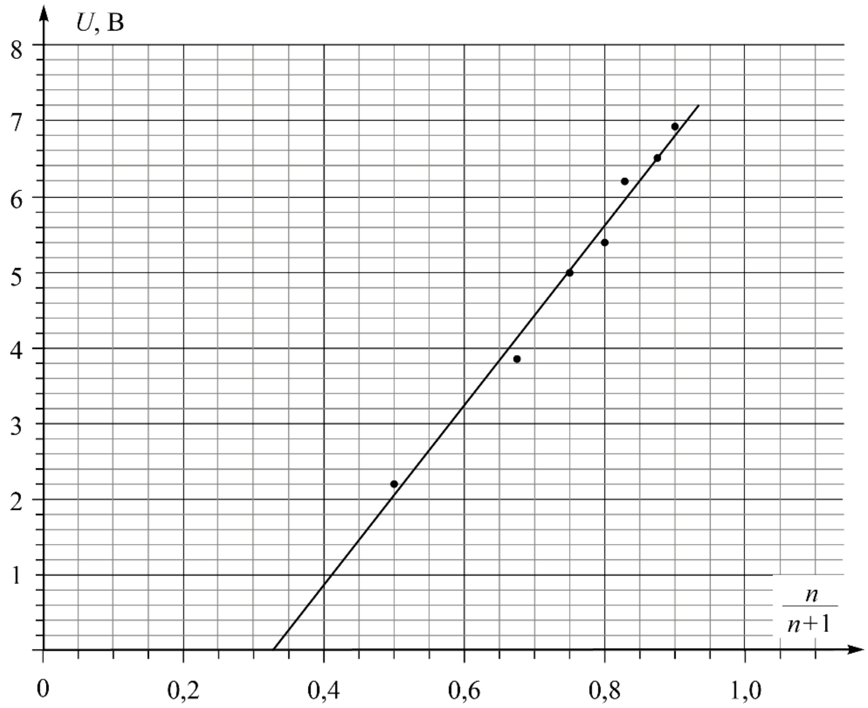


Рис. 3

5. Возьмем две «хорошие» точки на графике, в которых прямая линия проходит через перекрестия линий графической бумаги. Например, $\frac{n}{1+n}$ = 0,38; U = 0,6 В и $\frac{n}{1+n}$ = 0,88; U = 6,6 В. Тогда $U_0 = \frac{\Delta U}{\Delta\left(\frac{n}{1+n}\right)} = 12$ В.

График зависимости $U\left(\frac{n}{1+n}\right)$ пересекает горизонтальную ось в точке $\frac{n}{1+n}$ = 0,33. В этой точке U = 0, следовательно $\frac{k}{1+k}$ = 0,33 и k = 0,5.

№	**Задача 1.9.4. Критерии оценивания (20 баллов)**	**Баллы**
1	Вывод уравнения (3)	5
2	Построен график зависимости $U(n)$	3
	Указаны единицы измерения по осям (0,5 балла)	
	Выбран разумный масштаб (0,5 балла)	
	Оцифрованы оси (0,5 балла)	
	Нанесены экспериментальные точки (0,5 балла)	
	Через экспериментальные точки проведена линии (1 балл)	
3а	Осуществлена линеаризация зависимости $U(n)$	5
	Получена функция $z = n/(1+n)$ (2 балла)	
	Указание на то, что $U\left(\dfrac{n}{1+n}\right)$ – линейная функция (2 балла)	
	Таблица дополнена значениями $z = n/(1+n)$ (1 балл)	
4а	Построен график $U\left(\dfrac{n}{1+n}\right)$	3
	Указаны единицы измерения по осям (0,5 балла)	
	Выбран разумный масштаб (0,5 балла)	
	Оцифрованы оси (0,5 балла)	
	Нанесены экспериментальные точки (0,5 балла)	
	Через экспериментальные точки проведена прямая линия (1 балл)	
3б	Обоснование выбора точек для расчета (использование для расчёта точек, лежащих на кривой) (2 балла)	4
	Решение системы уравнений и получение значений U_0 и k (2 балла)	
5	Численные значения U_0 и k	4
	Результат $U_0 = (12 \pm 1)$ В (узкие ворота) (2 балла)	
	Результат $U_0 = (12 \pm 2)$ В (широкие ворота) (1 балл)	
	Результат $k = (0{,}50 \pm 0{,}05)$ (узкие ворота) (2 балла)	
	Результат $k = (0{,}5 \pm 0{,}1)$ (широкие ворота) (1 балл)	

Примечание: баллы за пункт 3б не суммируются с баллами пунктов 3а и 3б (и наоборот)