Подмосковная олимпиада 2021-2022. 6 класс. 26 марта 2022г.

Необходимо решить хотя бы 3 из 4 задач

1. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записи его цифр в обратном порядке (например, 252 – палиндром, а 1383 – нет). Представьте число 2022 в виде суммы трёх палиндромов.

   Решение. Ответ: $1001 + 999 + 22 = 2022$.

2. Разрежьте какой-нибудь квадрат на меньшие квадратики двух разных размеров так, чтобы количество маленьких и больших было одинаковым.

   Решение. В качестве примера можно рассмотреть квадрат 10×10, разрезанный на 20 квадратиков 2×2 и 20 квадратиков 1×1.

3. Вася написал в тетради три несократимые правильные дроби такие, что в сумме они составляют единицу, а числители этих дробей – различные натуральные числа. Он заметил, что сумма трёх дробей, обратных к исходным, является натуральным числом. Приведите пример таких дробей.
   Примечание: если $\frac{a}{b}$ – исходная дробь, то $\frac{b}{a}$ – обратная к ней.

   Решение. Ответ: например, $\frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{6}{11}$.

4. Автобусы из Москвы в Санкт-Петербург отправляются раз в час (в 00 минут). Автобусы из Санкт-Петербурга в Москву отправляются раз в час (в 30 минут). Поездка между городами занимает 5 часов. Сколько автобусов из Санкт-Петербурга встретит автобус, вышедший из Москвы, на своём пути?

   Решение. Ответ: 10.

Подмосковная олимпиада 2021-2022. 6 класс.

Задачи с устной проверкой решения

5. В школьном кубке по футболу участвовали 4 команды Альфа, Бета, Гамма и Дельта. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. За победу давалось 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш – 0 очков. По окончании турнира выяснилось, что у команды Альфа больше всех очков, а у команды Дельта – меньше всех. Возможно ли, что "Альфа"заработала всего на 2 очка больше, чем "Дельта"?

   Решение. Ответ: возможно. Укажем результаты матчей. Пусть Альфа сыграла вничью с командами Бета и Гамма, но выиграла у Дельты. Бета сыграла вничью с командой Альфа, выиграла у Гаммы и проиграла Дельте. Гамма сыграла вничью с командой Альфа, проиграла Бете и выиграла у Дельты. Дельта проиграла командам Альфа и Гамма, но выиграла у Беты. Тогда Альфа набрала 5 очков, Бета и Гамма набрали по 4 очка, Дельта набрала 3 очка.

6. В ряд выписаны 11 однозначных чисел так, что сумма любых четырёх подряд идущих чисел одинакова, при этом никакое из чисел не встречается более четырёх раз. Известно, что центральное число в ряду не меньше крайнего левого числа, но не больше крайнего правого. Кроме того, сумма всех чисел в ряду равна 81. Найдите центральное число.

   Решение. Ответ: 7. Так как сумма любых четырёх подряд идущих чисел одинакова, этот ряд из 11 чисел можно записать так: a,b,c,d,a,b,c,d,a,b,c. Причём числа a,b,c,d попарно различны, иначе будет по крайней мере 5 одинаковых в этом ряду. Тогда $3(a+b+c)+2d=81$, откуда получаем, что d кратно 3. Если $d=0$, то $a+b+c=27$, то есть $a=b=c=9$ - противоречие, так как получается 9 одинаковых чисел. Если $d=3$, $a+b+c=25$, а так как $25=8+8+9$ или $25=7+9+9$ то опять получаем противоречие с условием - 8 или 9 встретится в этом ряду более 4 раз. Пусть $d=9$, тогда $a+b+c=21$. То есть подходит единственный вариант $21=8+7+6$, причём $a=6$ - крайнее левое число, $b=7$ - центральное число, $c=8$ - крайнее правое число.

7. В некотором государстве есть несколько городов. Между городами есть дороги. Каждая дорога соединяет ровно два города. В справочнике утверждается, что количество дорог, которые выходят из каждого такого города, следующее: 2, 2, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 8. Выясните, верная ли информация указана в этом справочнике.

Решение. Разобьем города на две группы. Первая: $2, 2, 3, 3, 4$. Вторая: $6, 7, 7, 8$. Из первой группы выходит во вторую группу не более 14 дорог (если даже внутри группы никакие два города не соединены). Из второй группы выходит в первую группу не менее 28-6=22 дорог (даже если все города внутри группы соединены). То есть количество дорог, соединяющих первую группу со второй не может совпадать. Противоречие. Ответ: нет.

8. В зале собрания рыцарей круглого стола стоит 35 стульев. На собрание всегда приходит сколько-то рыцарей и ровно один лжец. Если у лжеца хотя бы с одной стороны сидит подряд 5 соседей рыцарей, то он боится и говорит только правду. Какое наименьшее количество рыцарей должно прийти, чтобы лжец, как бы он ни сел, всегда говорил правду?

   Решение. Решение задачи. Покажем, что 25 рыцарей хватит. Посадим за стол 5 пятёрок рыцарей через 2 свободных места. Тогда куда бы ни сел лжец, у него будет 5 сидящих подряд соседей-рыцарей и он скажет правду. Пусть хватит меньше 25 рыцарей. Назовём место за столом правдивым, если оно соседствует хотя бы с одной стороны с пятью сидящими подряд рыцарями. Каждая такая пятёрка может сделать правдивыми не более, чем два места за столом (с двух концов от неё). Если рыцарей меньше 25, то пятёрок сидящих подряд рыцарей не больше четырёх. Следовательно правдивыми за столом будут не более, чем 8 мест. Однако мест, на которых не сидят рыцари, не меньше 11. Тогда лжец найдёт себе место, не являющееся правдивым и солжёт.