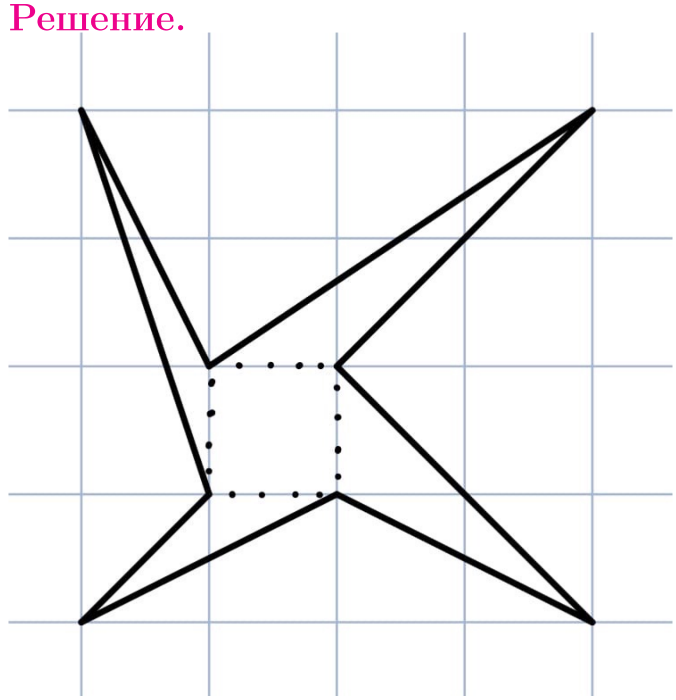
Подмосковная олимпиада 2021-2022, 7 класс

1. Петя написал в тетради 10 последовательных натуральных чисел. Когда Вася зачеркнул одно из них, то сумма оставшихся девяти чисел оказалась равна 2022. Какое число зачеркнул Вася?

   Решение. Обозначим числа в тетради: $x, x+1, x+2, ..., x+9$. Пусть Вася зачеркнул число $x+a$. Тогда сумма оставшихся чисел на доске равна $10x+45-x-a=2022$, $x=\frac{1977+a}{9}$
   $1977+a$ должно делиться на 9 (т.к. x-целое) $\Rightarrow a=3, x=220 \Rightarrow$ зачеркнутое число $x+a=223$.
   Ответ: 223.

2. На клетчатой бумаге отмечены 4 узла сетки, которые образуют квадрат 4×4. Отметьте ещё 4 узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился восьмиугольник (возможно, невыпуклый) площадью 4 клетки.

   Решение.

   Существуют другие примеры.

3. В школьном кубке по футболу участвовали 4 команды. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. При распределении мест по итогам турнира, каждое место достаётся ровно одной команде. Известно, что команда, занявшая третье место, набрала в 4 раза больше очков, чем команда, занявшая последнее место, и на 1 очко меньше, чем команда, занявшая второе

место. Сколько очков набрала команда, занявшая 1 место?

Решение. Всего сыграно $\frac{4*3}{2} = 6$ партий. В каждой партии может быть разыграно 3 очка (в случае победы одной из команд) или 2 очка (в случае ничьей). Пусть последнее место заняла команда, набравшая x очков, третье место - $4x$ очков, второе место - $4x + 1$ очков. Рассмотрим случай $x = 0$: тогда команды, занявшие третье и четвертое место, набрали 0 очков (всем проиграли), тогда в их общей партии каждая команда получила 0 очков, что невозможно. Пусть $x = 2$: тогда команда, занявшая третье место набрала 8 очков. Однако 8 невозможно набрать из трёх слагаемых, используя только 0, 1 и 3. Если $x > 2$, то команда, занявшая второе место, набрала больше 9 очков, что больше максимальной суммы очков (даже в случае победы надо всеми соперниками команда набирает 9 очков). Т.о. $x = 1$. Тогда результаты каждой из команд, расположенных на 2, 3, 4 местах, в каждой партии восстанавливаются однозначно:

2е место: 5 очков: 1 победа, 2 ничьи, 0 поражений

3е место: 4 очка: 1 победа, 1 ничья, 1 поражение

4е место: 1 очко: 0 побед, 1 ничья, 2 поражения

Каждому поражению соответствует одна победа, каждой ничье - другая ничья у другой команды. Исходя из этого, у команды, занявшей 1 место, может быть 0 ничьих или 2 ничьи. В первом случае у неё будет 6 очков: 2 победы и 1 поражение (3 победы быть не может, так как не хватит поражений других команд, а в случае отсутствия ничьих иметь меньше 2 побед на первом месте невозможно). Во втором случае у команды, занявшей первое место, будет 5 очков: 1 победа, 2 ничьи, 0 поражений. То есть команды, занявшие 1 и 2 места набрали одинаковое количество очков. Но так как по условию на каждом месте располагается ровно одна команда, то какая-то из двух команд займёт 1 место, а другая займёт 2 место (возможно, в соответствии с иными показателями, но, в данном случае, это не имеет значения).

Покажем, что оба случая могут быть реализованы.

Первый случай. Команда, занявшая первое место, выигрывает у 3 и 4 места и проигрывает 2 месту. Команда, занявшая 2 место, выигрывает у 1 места и играет вничью с 3 и 4 местом. Команда, занявшая 3 место, выигрывает у 4 места, играет вничью со 2 местом и проигрывает 1 месту. Команда, занявшая 4 место, играет вничью со 2 местом и проигрывает 1 и 3 месту.

Второй случай. Команда, занявшая первое место, выигрывает у 3 места и играет вничью со 2 и 4. Команда, занявшая 2 место, выигрывает у 4 места и играет вничью с 1 и 3 местом. Команда, занявшая 3 место, выигрывает у 4 места, играет вничью со 2 местом и проигрывает 1 месту. Команда, за-

нявшая 4 место, играет вничью с 1 местом и проигрывает 2 и 3 месту.
Ответ: 6 очков или 5 очков.

4. В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle BAC = \angle BDA$, $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$. Найдите AD, если $AB = 14$, $CD = 6$.

   Решение. Продлим AB и DC до пересечения в точке O. Тогда угол $\angle AOD = 60^\circ$ и ΔAOD - равносторонний. Заметим, что $\Delta ACO = \Delta DBA$ по стороне и двум прилежащим углам $(AD = AO, \angle BAC = \angle BDA, \angle COA = \angle BAD)$. Т.е. $AB = OC = 14 \Rightarrow OD = CD + OC = 14 + 6 = 20 = AD$
   Ответ: 20.

5. Клоун в цирке привязывает воздушные шарики на нитки. На одну нитку он может привязать 1, 15 или 50 шариков. Маша взяла несколько таких ниток с шариками, но потом решила их поменять. Оказалось, что после обмена у неё стало на одну нитку с шариками больше, а самих шариков – меньше. На какое наименьшее количество могло стать меньше шариков после такого обмена?

   Решение. Приведём пример: Маша отдала клоуну нитку с 1 шариком и с 50 шариками, а взамен получила три нитки, на каждой из которых 15 шариков. Докажем, что на меньшее количество стать меньше не могло. Рассмотрим остатки при делении на 7 каждого из количеств шариков на нитках. Эти остатки одинаковы и равны 1. Пусть Маша отдала n ниток, на которых суммарно X шариков, тогда остаток от деления X на 7 равен остатку от деления n на 7. Кроме того, пусть Маша получила (n+1) нитку, на которых суммарно Y шариков. Тогда остаток от деления на 7 разности шариков (X-Y) равен разности остатка X от деления на 7 и остатка Y от деления на 7, то есть равен 6. Таким образом, меньше, чем на 6 количество шариков уменьшится не могло.
   Ответ: на 6.

6. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на 6 частей. В одном из узлов стоит фишка. Петя и Вася по очереди передвигают ее в один из соседних узлов, причем запрещается ходить в узел, в котором фишка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре, если Вася определяет изначальный узел, в котором находится фишка, а Петя делает первый ход?

   Решение. Выигрывает Петя. Рассмотрим его стратегию. Всего узлов 28. Разобьём узлы на пары, как показано на рисунке. Вася определяет начальный узел, этот узел попадает в некоторую пару на данном разбиении. Тогда

Петя передвигает фишку на второй узел в этой паре. Каждый следующий ход Васи будет перемещать фишку на первый узел новой пары. Петя всегда будет отвечать перемещением фишки на парный узел. Таким образом, на каждый ход Васи у Пети есть ответный ход.