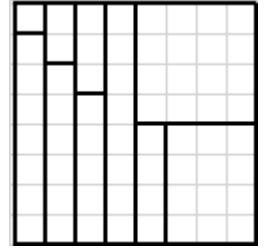


# XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

## Решения и критерии оценки заданий регионального этапа, 1 день

1. Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером  $8 \times 8$  клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек. (И. Рубанов)



**Решение.** Например, так, как показано на рисунке справа.

**Критерии.** Изображён или описан соответствующий условиям задачи способ разрезания: 7 баллов.

Указаны прямоугольники, на которые действительно можно разрезать квадрат с соблюдением условий задачи, но способ разрезания не изображен и не описан: 3 балла.

2. Учитель придумал ребус, заменив в примере  $a+b=c$  на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (например, если  $a=23$ ,  $a b=528$ , то  $c=551$ , и получился, с точностью до выбора букв, ребус  $AB+BAГ=BBД$ ). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы  $c$ . (И. Богданов)

**Ответ. 10. Решение.** Если ребус имеет вид  $A+B=AB$ , то  $A=1$ , так как  $A+B < 20$ , и  $B=9$ , так как иначе сумма  $A+B$  — однозначное число. Таким образом, при  $c=10$  по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример  $1+9=10$ . Если же  $c < 10$ , то ребус имеет вид  $A+B=B$ , и определить, был ли это пример  $1+2=3$ , пример  $1+3=4$  или любой из десятков других подобных примеров, не удастся.

**Критерии.** Только ответ 10: 0 баллов.

Дан ответ, указан вид ребуса  $A+B=AB$ , дальнейшего содержательного продвижения нет: 1 балл.

Указан вид ребуса  $A+B=AB$ , доказано, что он имеет единственное решение, дальнейшего содержательного продвижения нет: 3 балла.

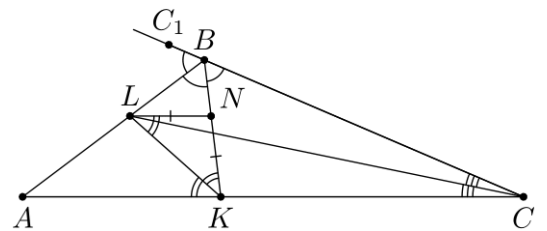
Показано, что ребус вида  $A+B=B$  имеет больше одного решения, дальнейшего содержательного продвижения нет: 3 балла.

Дан ответ, указан вид ребуса  $A+B=AB$ , показано, что ребус вида  $A+B=B$  имеет больше одного решения, единственность решения ребуса  $A+B=AB$  не доказана: 4 балла.

Дан ответ, указан вид ребуса  $A+B=AB$ , показано, что ребус вида  $A+B=B$  имеет больше одного решения, единственность решения ребуса  $A+B=AB$  доказана с погрешностями: 5–6 баллов.

3. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BK$  и  $CL$ . На отрезке  $BK$  отмечена точка  $N$  так, что  $LN \parallel AC$ . Оказалось, что  $NK=LN$ . Найдите величину угла  $ABC$ . (А. Кузнецов)

**Ответ.  $120^\circ$ . Решение.** В равнобедренном треугольнике  $LNK$   $\angle KLN = \angle LKN$ . Кроме того, равны углы  $KLN$  и  $LKA$  как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $LN$  и  $AC$ . Таким образом,  $\angle KLN = \angle LKA$ , то есть луч  $KL$  — биссектриса угла  $AKB$ . Следовательно, лежащая на нём точка  $L$  равноудалена от прямых  $KA$  и  $KB$ . Кроме того, она равноудалена от прямых  $CA=KA$  и  $CB$ , так как лежит на биссектрисе угла  $ACB$ .



Значит, точка  $L$  равноудалена от прямых  $CB$  и  $KB$ , и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол  $KBC_1$ , где  $C_1$  — точка на продолжении отрезка  $CB$  за точку  $B$ , а его биссектрисой должен быть луч  $BL=BA$ . Отсюда получаем, что  $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$ . Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен  $60^\circ$ , откуда  $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120^\circ$ .

**Критерии.** Показано, что  $KL$  — биссектриса угла  $AKB$ , дальнейшего содержательного продвижения нет: 1 балл.

Показано, что точка  $L$  равноудалена от прямых  $CB$ ,  $CA$  и  $KB$  (или что точка  $L$  является центром вневписанной окружности треугольника  $AKB$ ), дальнейшего содержательного продвижения нет: 3 балла.

4. Числа  $1, 2, \dots, 1000$  разбили на два множества по 500 чисел: красные  $k_1, k_2, \dots, k_{500}$  и синие  $s_1, s_2, \dots, s_{500}$ . Докажите, что количество таких пар  $m$  и  $n$ , у которых разность  $k_m - s_n$  даёт остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар  $m$  и  $n$ , у которых разность  $s_n - k_m$  даёт остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные.

Напомним, что остатком от деления целого числа  $a$  на 100 называется разность между числом  $a$  и ближайшим числом, не большим  $a$  и делимым на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен  $2022 - 2000 = 22$ , а остаток от деления числа  $-11$  на 100 равен  $-11 - (-100) = 89$ . (Е. Бакаев)

**Решение.** Выпишем на доске все числа от 1 до 1000, и будем проводить стрелку от числа  $a$  к числу  $b$ , если разность  $a-b$  дает остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и синим концом, что и требовалось доказать.

**5. При каком наибольшем  $n$  существует выпуклый  $n$ -угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений? (И. Рубанов)**

**Ответ.** При  $n = 7$ . **Решение.** *Пример.* Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две. *Оценка.* Пусть  $AB$  — сторона выпуклого многоугольника  $M$ , у которого есть диагонали только двух возможных длин  $x$  и  $y$ . Тогда для всякой вершины  $C$ , не смежной с  $A$  и  $B$ , стороны  $CA$  и  $CB$  треугольника  $ACB$  могут равняться только  $x$  и  $y$ . Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину  $C$ , так как она должна лежать с той же стороны от прямой  $AB$ , что и весь многоугольник  $M$ . Но таких комбинаций сторон есть только четыре:  $CA = CB = x$ ;  $CA = CB = y$ ;  $CA = x, CB = y$ ;  $CA = y, CB = x$ . При этом из двух первых комбинаций возможна только одна, так как иначе соответствующие вершины  $C_1$  и  $C_2$  многоугольника  $M$  лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне  $AB$ , что противоречило бы выпуклости  $M$ : та из вершин  $C_1$  и  $C_2$ , которая ближе к  $AB$ , оказалась бы внутри треугольника с вершинами в  $A, B$  и другой из этих вершин. Таким образом, у многоугольника  $M$  не больше трёх вершин, не смежных с вершинами  $A$  и  $B$ , то есть всего у него не более 7 вершин.

**Критерии.** Только ответ 7: 0 баллов.

Дан верный ответ и приведён пример семиугольника, длины диагоналей которого принимают только два различных значения, содержательного продвижения в доказательстве оценки нет: 1 балл.