ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

10 класс

10 заданий по 5 баллов
(максимум 50 баллов)
продолжительность 120 минут

Задание №1. Дорога в школу

Вариант 1 задания №1

В понедельник Володя шел из дома в школу с постоянной скоростью. Во вторник он шел с такой же скоростью, но на середине пути у него случилась беда: порвалась лямка на портфеле и рассыпались все учебники. 5 минут он собирал учебники, и после этого побежал в школу со скоростью, в два раза больше предыдущей. Сколько времени заняла дорога у Володи в понедельник, если во вторник он потратил на дорогу столько же времени с учетом задержки? Ответ запишите в минутах (укажите только число минут, при необходимости округлите до сотых и запишите конечную десятичную дробь).

Решение:

Пусть S — расстояние между школой и домом Володи. Пусть v — скорость, с которой он шел в понедельник из дома в школу, тогда на весь путь он затратил время равное $\frac{S}{v}$. Во вторник первую половину пути он шел с той же скоростью, поэтому время, потраченное на этот путь равно $\frac{S}{2v}$. Вторую половину пути он побежал со скоростью $2v$, поэтому время, которое он потратил на вторую половину пути равно $\frac{S}{4v}$. Так как и во вторник, и в понедельник, время, потраченное на дорогу одинаковое, то получим уравнение: $\frac{S}{v} = \frac{S}{2v} + \frac{S}{4v} + 5$ $\frac{S}{4v} = 5$, откуда получаем, что $\frac{S}{v} = 20$.

Ответ: 20 минут заняла дорога у Володи в понедельник

Вариант 2 задания №1

В понедельник Володя шел из дома в школу с постоянной скоростью. Во вторник он шел с такой же скоростью, но, когда до школы оставалось треть всего расстояния, у него случилась беда: порвалась лямка на портфеле и рассыпались все учебники. 5 минут он собирал учебники и после этого побежал в школу со скоростью, в два раза больше предыдущей. Сколько времени заняла дорога у Володи в понедельник, если во вторник он потратил на дорогу столько же времени с учетом задержки? Ответ запишите в минутах (укажите только число минут, при необходимости округлите до сотых и запишите конечную десятичную дробь).

Решение:

Пусть S — расстояние между школой и домом Володи. Пусть v — скорость, с которой он шел в понедельник из дома в школу, тогда на весь путь он затратил время равное $\frac{S}{v}$. Во вторник первые две трети пути он шел с той же скоростью, поэтому время, потраченное на этот путь равно $\frac{2S}{3v}$. Оставшуюся треть пути он побежал со скоростью $2v$, поэтому время, которое он потратил на вторую половину пути равно $\frac{S}{6v}$. Так как и во вторник, и в понедельник, время, потраченное на дорогу одинаковое, то получим уравнение: $\frac{S}{v} = \frac{2S}{3v} + \frac{S}{6v} + 5$ $\frac{S}{6v} = 5$, откуда получаем, что $\frac{S}{v} = 30$.

Ответ: 30 минут заняла дорога у Володи в понедельник

Вариант 3 задания №1

В понедельник Володя шел из дома в школу с постоянной скоростью. Во вторник он шел с такой же скоростью, но, когда он отошел от дома на треть всего расстояния, у него случилась беда: порвалась лямка на портфеле и рассыпались все учебники. 5 минут он собирал учебники и после этого побежал в школу со скоростью, в два раза больше предыдущей. Сколько времени заняла дорога у Володи в понедельник, если во вторник он потратил на дорогу столько же времени с учетом задержки? Ответ запишите в минутах (укажите только число минут, при необходимости округлите до сотых и запишите конечную десятичную дробь).

Решение:

Пусть S — расстояние между школой и домом Володи. Пусть v — скорость, с которой он шел в понедельник из дома в школу, тогда на весь путь он затратил время равное $\frac{S}{v}$. Во вторник первую треть пути он шел с той же скоростью, поэтому время, потраченное на этот путь равно $\frac{S}{3v}$. Оставшиеся две трети пути он побежал со скоростью $2v$, поэтому время, которое он потратил на вторую половину пути равно $\frac{2S}{6v} = \frac{S}{3v}$. Так как и во вторник, и в понедельник, время, потраченное на дорогу одинаковое, то получим уравнение: $\frac{S}{v} = \frac{S}{3v} + \frac{S}{3v} + 5$ $\frac{S}{3v} = 5$, откуда получаем, что $\frac{S}{v} = 15$.

Ответ: 15 минут заняла дорога у Володи в понедельник

Задание №2. Клеточные уголки

Вариант 1 задания №2

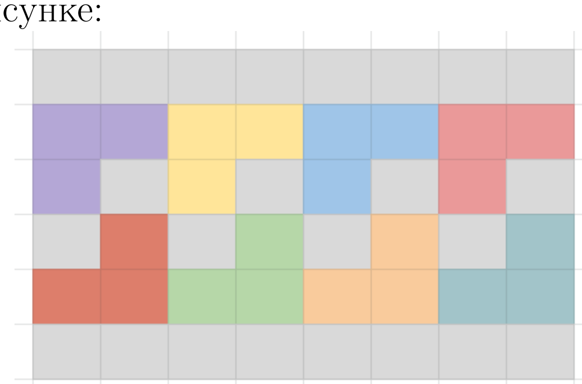
Учительница велела Васе вырезать несколько трёхклеточных уголков из бумажного прямоугольника так, чтобы больше ни одного такого уголка вырезать было нельзя. Вася очень ленивый и хочет вырезать как можно меньше таких уголков.

А вот, кстати, как выглядят трёхклеточные уголки:

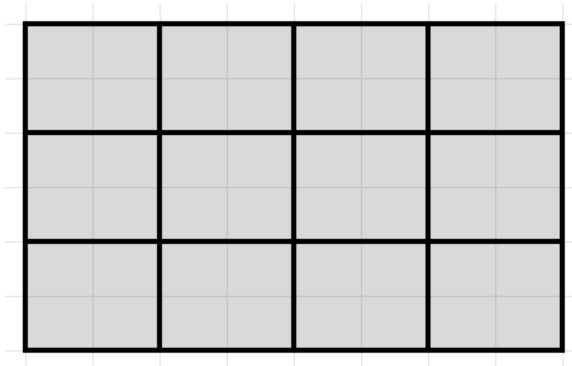
Изначально Васе был дан прямоугольник 6×8 клеточек. Какое минимальное число уголков ему придётся вырезать?

Решение:

Один из вариантов вырезания 8 уголков так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного, показан на рисунке:



Теперь докажем, что если в прямоугольнике размещены 7 уголков, то еще один уголок можно разместить. 7 уголков занимают 21 клетку. Разобьем весь прямоугольник на 12 квадратов 2×2.



Заметим, что в каждом квадрате 2×2 должны находиться как минимум две клетки размещенных уголков, иначе можно было бы разместить еще один уголок. Тогда всего в уголках как минимум $12 \cdot 2 = 24$ клетки, что больше чем 21. Значит, размещенных уголков больше 7.

Ответ: 8 уголков

Вариант 2 задания №2

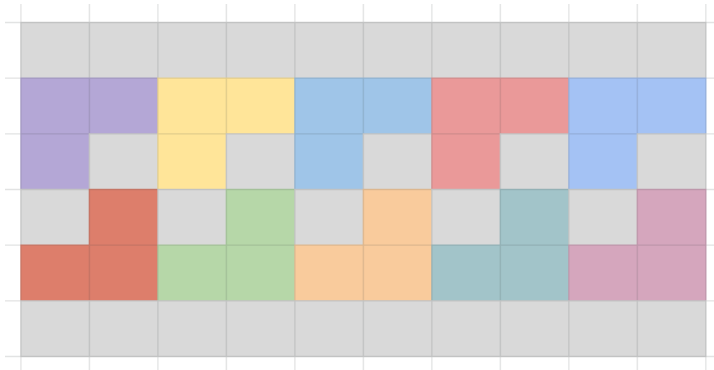
Учительница велела Васе вырезать несколько трёхклеточных уголков из бумажного прямоугольника так, чтобы больше ни одного такого уголка вырезать было нельзя. Вася очень ленивый и хочет вырезать как можно меньше таких уголков.

А вот, кстати, как выглядят трёхклеточные уголки:

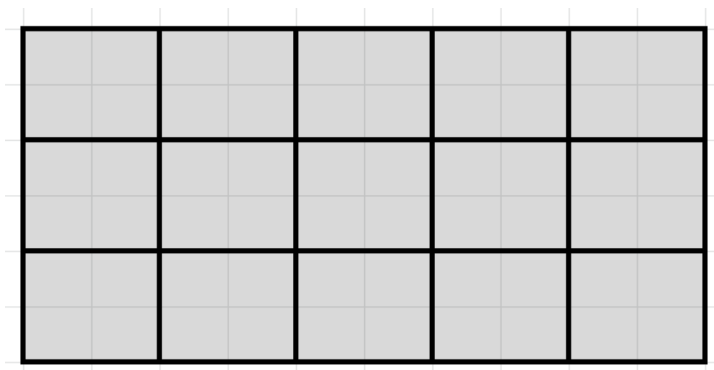
Изначально Васе был дан прямоугольник 6×10 клеточек. Какое минимальное число уголков ему придётся вырезать?

Решение:

Один из вариантов вырезания 10 уголков так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного, показан на рисунке:



Теперь докажем, что если в прямоугольнике размещены 9 уголков, то еще один уголок можно разместить. 9 уголков занимают 27 клеток. Разобьем весь прямоугольник на 15 квадратов 2×2.



Заметим, что в каждом квадрате 2×2 должны находиться как минимум две клетки размещенных уголков, иначе можно было бы разместить еще один уголок. Тогда всего в уголках как минимум $15 \cdot 2 = 30$ клеток, что больше чем 27. Значит, размещенных уголков больше 9.

Ответ: 10 уголков

Вариант 3 задания №2

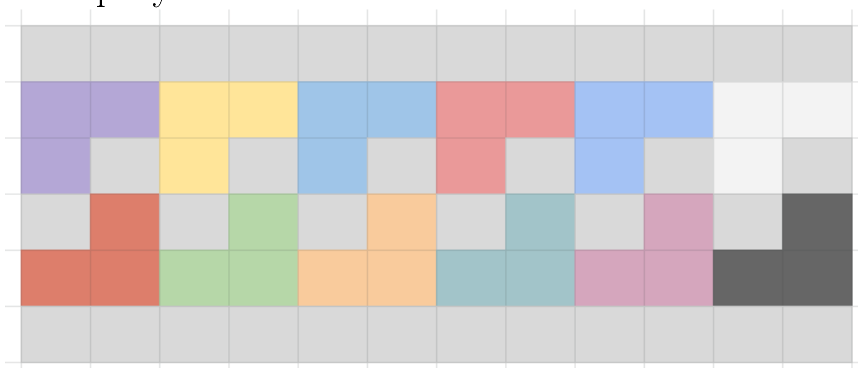
Учительница велела Васе вырезать несколько трёхклеточных уголков из бумажного прямоугольника так, чтобы больше ни одного такого уголка вырезать было нельзя. Вася очень ленивый и хочет вырезать как можно меньше таких уголков.

А вот, кстати, как выглядят трёхклеточные уголки:

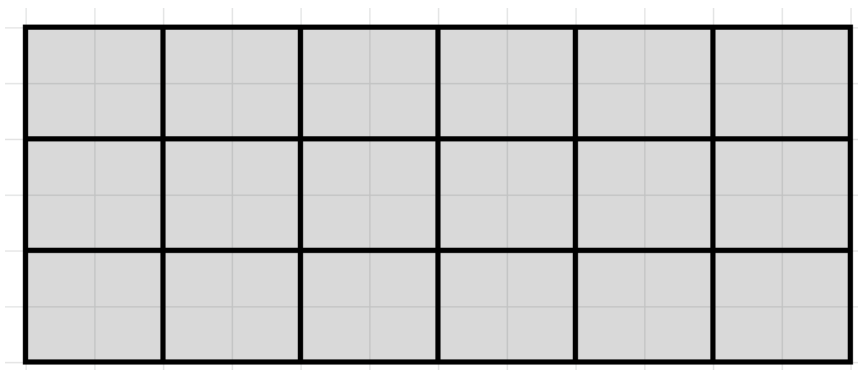
Изначально Васе был дан прямоугольник 6×12 клеточек. Какое минимальное число уголков ему придётся вырезать?

Решение:

Один из вариантов вырезания 12 уголков так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного, показан на рисунке:



Теперь докажем, что если в прямоугольнике размещены 11 уголков, то еще один уголок можно разместить. 11 уголков занимают 33 клеток. Разобьем весь прямоугольник на 18 квадратов 2×2.



Заметим, что в каждом квадрате 2×2 должны находиться как минимум две клетки размещенных уголков, иначе можно было бы разместить еще один уголок. Тогда всего в уголках как минимум $18 \cdot 2 = 36$ клеток, что больше чем 33. Значит, размещенных уголков больше 11.

Ответ: 12 уголков

Задание №3. Очень вместительная доска

Вариант 1 задания №3

На доске написаны числа, среди которых есть различные.

Известно, что для каждого из написанных чисел на доске найдутся 2020 других написанных чисел, среднее арифметическое которых равно этому числу. Какое минимальное количество чисел могло быть написано на доске?

Напоминаем: среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ – это $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Решение:

Пусть $2020 = N$.

Рассмотрим самое маленькое число из написанных. Оно может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Аналогично, самое большое число может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Таким образом, на доске написано не менее $1 + N + 1 + N = 2N + 2$ чисел.

Очевидно, что набор из $N+1$ чисел, равных a, и $N+1$ чисел, равных b, удовлетворяют условию ($a \neq b$).

Ответ: 4042 числа

Вариант 2 задания №3

На доске написаны числа, среди которых есть различные.

Известно, что для каждого из написанных чисел на доске найдутся 1009 других написанных чисел, среднее арифметическое которых равно этому числу. Какое минимальное количество чисел могло быть написано на доске?

Напоминаем: среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ – это $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Решение:

Пусть $1009 = N$.

Рассмотрим самое маленькое число из написанных. Оно может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Аналогично, самое большое число может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел.

Таким образом, на доске написано не менее $1 + N + 1 + N = 2N + 2$ чисел (одно самое маленькое, ещё N равных самому маленькому, и одно самое большое и ещё N равных самому большому).

Очевидно, что набор из $N + 1$ чисел, равных a, и $N + 1$ чисел, равных b, удовлетворяют условию ($a \neq b$).

Ответ: 2020

Вариант 3 задания №3

На доске написаны числа, среди которых есть различные.

Известно, что для каждого из написанных чисел на доске найдутся 1527 других написанных чисел, среднее арифметическое которых равно этому числу. Какое минимальное количество чисел могло быть написано на доске?

Напоминаем: среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ – это $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Решение:

Пусть $1527 = N$.

Рассмотрим самое маленькое число из написанных. Оно может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Аналогично, самое большое число может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел.

Таким образом, на доске написано не менее $1 + N + 1 + N = 2N + 2$ чисел (одно самое маленькое, ещё N равных самому маленькому, и одно самое большое и ещё N равных самому большому).

Очевидно, что набор из $N + 1$ чисел, равных a, и $N + 1$ чисел, равных b, удовлетворяют условию ($a \neq b$).

Ответ: 3056

Задание №4. Злой учитель

Вариант 1 задания №4

Учитель ставит ученику двойку, если в домашней работе решено менее трёх задач. Кроме того, если у двух учеников наборы решённых задач (независимо от порядка) совпадают, то учитель считает, что они списали, и ставит им обоим двойку. В иных случаях учитель, так и быть, двойку не ставит.

В классе 30 учеников. Укажите наибольшее число задач, которое злой учитель может задать на дом так, чтобы обязательно кто-нибудь получил двойку.

Решение:

Пусть на дом задано n задач, тогда всего комбинаций решенных задач 2^n (каждую из задач ученик может решить или не решить). Вычтем из этих комбинаций комбинации, когда решено менее 3 задач: 1 комбинация, когда ничего не решено; n комбинаций, когда решена 1 задача; $\frac{n(n-1)}{2}$, когда решено две задачи (первую решенную можно выбрать n способами, вторую $(n-1)$, при этом нам не важен порядок, поэтому делим на 2. Итого получаем, что уникальных комбинаций, за которые учитель не поставит оценку «2»: $2^n-1-n-\frac{n(n-1)}{2}$. Для того, чтобы кто-нибудь обязательно получил оценку «2», это число должно быть меньше, чем число учеников в классе (чтобы у каких-то двух комбинация задач совпадала). Получаем неравенство: $2^n-1-n-\frac{n(n-1)}{2}<30$ наибольшее n, удовлетворяющее этому неравенству это $n=5$.

Ответ: 5 задач

Вариант 2 задания №4

Учитель ставит ученику двойку, если в домашней работе решено менее трёх задач. Кроме того, если у двух учеников наборы решённых задач (независимо от порядка) совпадают, то учитель считает, что они списали, и ставит им обоим двойку. В иных случаях учитель, так и быть, двойку не ставит.

В классе 50 учеников. Укажите наибольшее число задач, которое злой учитель может задать на дом так, чтобы обязательно кто-нибудь получил двойку.

Решение:

Пусть на дом задано n задач, тогда всего комбинаций решенных задач 2^n (каждую из задач ученик может решить или не решить). Вычтем из этих комбинаций комбинации, когда решено менее 3 задач: 1 комбинация, когда ничего не решено; n комбинаций, когда решена 1 задача; $\frac{n(n-1)}{2}$, когда решено две задачи (первую решенную можно выбрать n способами, вторую $(n-1)$, при этом нам не важен порядок, поэтому делим на 2. Итого получаем, что уникальных комбинаций, за которые учитель не поставит оценку «2»: $2^n-1-n-\frac{n(n-1)}{2}$. Для того, чтобы кто-нибудь обязательно получил оценку «2», это число должно быть меньше, чем число учеников в классе (чтобы у каких-то двух комбинация задач совпадала). Получаем неравенство: $2^n-1-n-\frac{n(n-1)}{2}<50$ наибольшее n, удовлетворяющее этому неравенству это $n=6$.

Ответ: 6 задач

Вариант 3 задания №4

Учитель ставит ученику двойку, если в домашней работе решено менее трёх задач. Кроме того, если у двух учеников наборы решённых задач (независимо от порядка) совпадают, то учитель считает, что они списали, и ставит им обоим двойку. В иных случаях учитель, так и быть, двойку не ставит.

В классе 40 учеников. Укажите наибольшее число задач, которое злой учитель может задать на дом так, чтобы обязательно кто-нибудь получил двойку.

Решение:

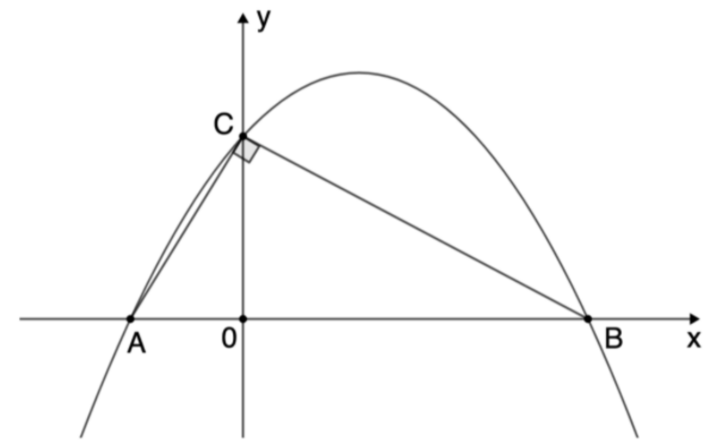
Пусть на дом задано n задач, тогда всего комбинаций решенных задач 2^n (каждую из задач ученик может решить или не решить). Вычтем из этих комбинаций комбинации, когда решено менее 3 задач: 1 комбинация, когда ничего не решено; n комбинаций, когда решена 1 задача; $\frac{n(n-1)}{2}$, когда решено две задачи (первую решенную можно выбрать n способами, вторую $(n-1)$, при этом нам не важен порядок, поэтому делим на 2. Итого получаем, что уникальных комбинаций, за которые учитель не поставит оценку «2»: $2^n-1-n-\frac{n(n-1)}{2}$. Для того, чтобы кто-нибудь обязательно получил оценку «2», это число должно быть меньше, чем число учеников в классе (чтобы у каких-то двух комбинация задач совпадала). Получаем неравенство: $2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} < 40$ наибольшее n, удовлетворяющее этому неравенству это $n = 5$.

Ответ: 5 задач

Задание №5. График квадратного трёхчлена

Вариант 1 задания №5

На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A\ (-5; 0)$ и $B\ (20; 0)$ – точек пересечения данной параболы с осью Ox. Точка C – пересечение данной параболы с осью Oy – расположена выше оси Ox. Также известно, что $\angle ACB = 90°$.



Укажите старший коэффициент квадратного трёхчлена (т.е. число a).

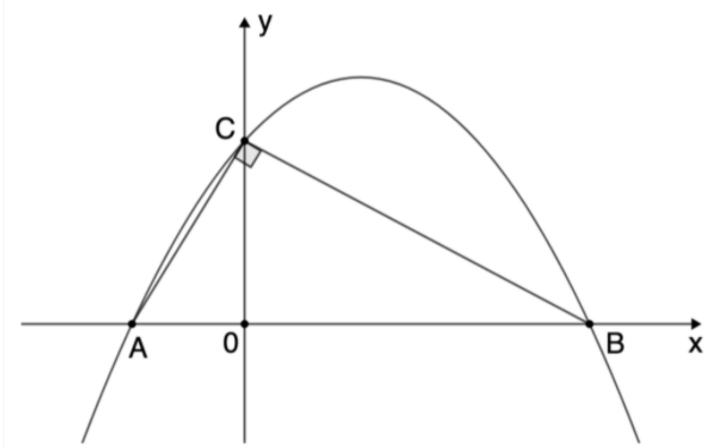
Решение:

Пусть O- начало координат, тогда в прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CO. Так как $\angle CAB = 90° - \angle CBA = \angle OCB$, то $\triangle OCB \sim \triangle CAB$, откуда получаем, что $OC^2 = AO \cdot OB = 100$ и $OC = 10$. С другой стороны, C имеет координаты $(0; c)$. По теореме Виета для квадратного трехчлена $c = ax_1x_2$, то есть $10 = a \cdot (-5) \cdot 20$, откуда получаем, что $a = -0,1$.

Ответ: $-0,1$

Вариант 2 задания №5

На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A\ (-\frac{1}{9}; 0)$ и $B\ (\frac{1}{4}; 0)$ – точек пересечения данной параболы с осью Ox. Точка C – пересечение данной параболы с осью Oy – расположена выше оси Ox. Также известно, что $\angle ACB = 90°$.



Укажите старший коэффициент квадратного трёхчлена (т.е. число a).

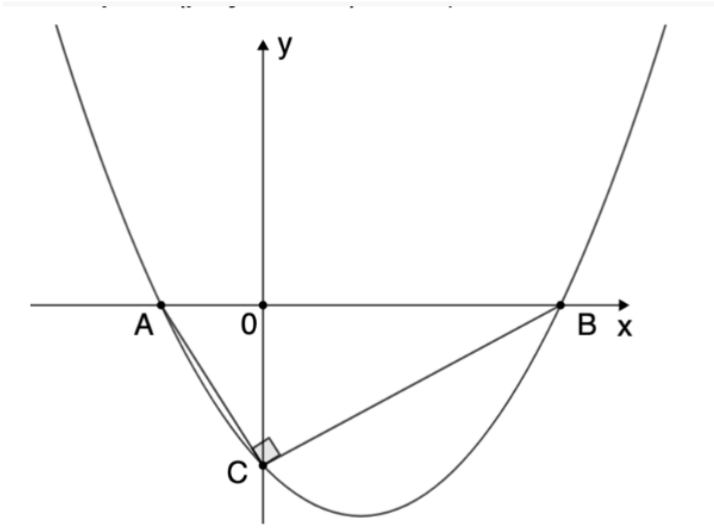
Решение:

Пусть O- начало координат, тогда в прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CO. Так как $\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle OCB$, то $\triangle OCB \sim \triangle CAB$, откуда получаем, что $OC^2 = AO \cdot OB = \frac{1}{36}$ и $OC = \frac{1}{6}$. С другой стороны, C имеет координаты $(0; c)$. По теореме Виета для квадратного трехчлена $c = ax_1x_2$, то есть $\frac{1}{6} = a \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{9}$, откуда получаем, что $a = -6$.

Ответ: -6

Вариант 3 задания №5

На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A\ (-\frac{1}{9}; 0)$ и $B\ (\frac{1}{4}; 0)$ – точек пересечения данной параболы с осью Ox. Точка C – пересечение данной параболы с осью Oy – расположена ниже оси Ox. Также известно, что $\angle ACB = 90^\circ$.



Укажите старший коэффициент квадратного трёхчлена (т.е. число a).

Решение:

Пусть O- начало координат, тогда в прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CO. Так как $\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle OCB$, то $\triangle OCB \sim \triangle CAB$, откуда получаем, что $OC^2 = AO \cdot OB = \frac{1}{36}$ и $OC = \frac{1}{6}$. С другой стороны, C имеет координаты $(0; c)$. По теореме Виета для квадратного трехчлена $c = ax_1x_2$, то есть $-\frac{1}{6} = a \cdot (-\frac{1}{9}) \cdot \frac{1}{4}$, откуда получаем, что $a = 6$.

Ответ: 6

Задание №6. Не вписанный прямоугольник

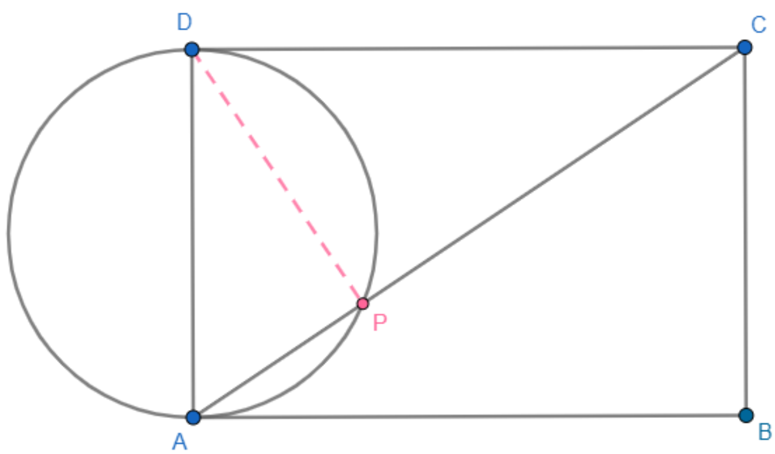
Вариант 1 задания №6

Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A и D, касается прямой CD и пересекает диагональ AC в точке P. Найдите длину отрезка DP, если $AP = \sqrt{7}$, $AB = 14\sqrt{2}$.

Решение:

Пусть $AP = p$, $AB = b$, $DP = x$.

Ясно, что $CD = AB = b$. По свойству касательной и секущих из одной точки $CP \cdot CA = CD^2 = b^2$.



Поскольку AD является диаметром данной в условии окружности, то $DP \perp AC$. По свойству высоты прямоугольного треугольника (применительно к $\triangle ADC$) $x^2 = DP^2 = AP \cdot CP = p \cdot CP$, откуда $CP = \dfrac{x^2}{p}$, $CA = p + \dfrac{x^2}{p}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{p} \cdot \left(p + \frac{x^2}{p}\right) = b^2$$

Упрощая, получаем $x^4 + p^2x^2 - p^2b^2 = 0$ — квадратное уравнение относительно x^2. Решая (и учитывая, что $x > 0$), получаем $x = \sqrt{\dfrac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2b^2}}{2}}$.

Ответ: 7

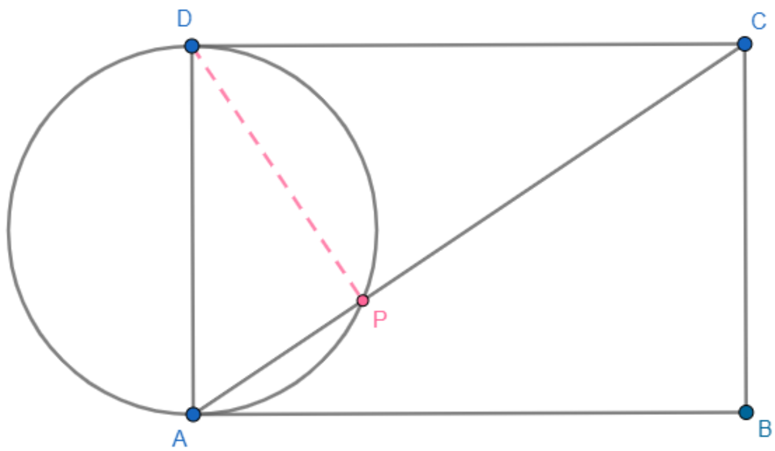
Вариант 2 задания №6

Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A и D, касается прямой CD и пересекает диагональ AC в точке P. Найдите длину отрезка DP, если $AP = \sqrt{11}$, $AB = 22\sqrt{3}$.

Решение:

Пусть $AP = p$, $AB = b$, $DP = x$.

Ясно, что $CD = AB = b$. По свойству касательной и секущих из одной точки $CP \cdot CA = CD^2 = b^2$.



Поскольку AD является диаметром данной в условии окружности, то $DP \perp AC$. По свойству высоты прямоугольного треугольника (применительно к $\triangle ADC$) $x^2 = DP^2 = AP \cdot CP = p \cdot CP$, откуда $CP = \dfrac{x^2}{p}$, $CA = p + \dfrac{x^2}{p}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{p} \cdot \left(p + \frac{x^2}{p}\right) = b^2$$

Упрощая, получаем $x^4 + p^2x^2 - p^2b^2 = 0$ — квадратное уравнение относительно x^2. Решая (и учитывая, что $x > 0$), получаем $x = \sqrt{\dfrac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2b^2}}{2}}$.

Ответ: 11

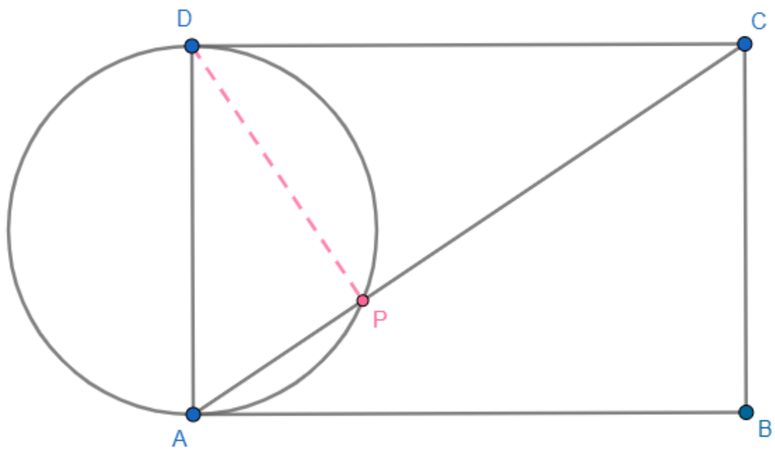
Вариант 3 задания №6

Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A и D, касается прямой CD и пересекает диагональ AC в точке P. Найдите длину отрезка DP, если $AP = 3$, $AB = 9\sqrt{10}$.

Решение:

Пусть $AP = p$, $AB = b$, $DP = x$.

Ясно, что $CD = AB = b$. По свойству касательной и секущих из одной точки $CP \cdot CA = CD^2 = b^2$.



Поскольку AD является диаметром данной в условии окружности, то $DP \perp AC$. По свойству высоты прямоугольного треугольника (применительно к $\triangle ADC$) $x^2 = DP^2 = AP \cdot CP = p \cdot CP$, откуда $CP = \dfrac{x^2}{p}$, $CA = p + \dfrac{x^2}{p}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{p} \cdot \left(p + \frac{x^2}{p}\right) = b^2$$

Упрощая, получаем $x^4 + p^2x^2 - p^2b^2 = 0$ — квадратное уравнение относительно x^2. Решая (и учитывая, что $x > 0$), получаем $x = \sqrt{\dfrac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2b^2}}{2}}$.

Ответ: 9

Задание №7. И корни целы, и математики сыты

Вариант 1 задания №7

Ненулевое число a таково, что оба корня уравнения ниже – целые числа. Укажите наибольшее число, которое может быть корнем этого уравнения. Уравнение:

$$a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0.$$

Решение:

Будем решать задачу для уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - pa^2 = 0$, где вместо p стоит некоторое натуральное число.

Запишем формулы Виета для уравнения из условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{1 - pa^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} - p = (x_1 + x_2)^2 - p.$$

Упрощая второе уравнение, получаем $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$. Умножим на 4:

$$4p = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Следовательно, $|x_2| \le \sqrt{4p/3}$. (Эта оценка справедлива для каждого из корней.)

Осталось заметить, что при $p = 7$ получаем $|x_2| \le \sqrt{28/3}$, значит, $x_2 \le 3$, а числа 3 и -1 являются корнями исходного уравнения при $a = -1/2$ (уравнение принимает вид $x^2/4 - x/2 - 3/4 = 0$).

Ответ: 3

Вариант 2 задания №7

Ненулевое число a таково, что оба корня уравнения ниже – целые числа. Укажите наибольшее число, которое может быть корнем этого уравнения. Уравнение:

$$a^2x^2 + ax + 1 - 21a^2 = 0.$$

Решение:

Будем решать задачу для уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - pa^2 = 0$, где вместо p стоит некоторое натуральное число.

Запишем формулы Виета для уравнения из условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{1-pa^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} - p = (x_1+x_2)^2 - p.$$

Упрощая второе уравнение, получаем $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$. Умножим на 4:

$$4p = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Следовательно, $|x_2| \le \sqrt{4p/3}$. (Эта оценка справедлива для каждого из корней.)

Осталось заметить, что при $p = 21$ получаем $|x_2| \le \sqrt{28}$, значит, $x_2 \le 5$, а числа 5 и -1 являются корнями исходного уравнения при $a = -1/4$ (уравнение принимает вид $x^2/16 - x/4 - 5/16 = 0$).

Ответ: 5

Вариант 3 задания №7

Ненулевое число a таково, что оба корня уравнения ниже – целые числа. Укажите наибольшее число, которое может быть корнем этого уравнения. Уравнение:

$$a^2x^2 + ax + 1 - 13a^2 = 0.$$

Решение:

Будем решать задачу для уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - pa^2 = 0$, где вместо p стоит некоторое натуральное число.

Запишем формулы Виета для уравнения из условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{1-pa^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} - p = (x_1+x_2)^2 - p.$$

Упрощая второе уравнение, получаем $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$. Умножим на 4:

$$4p = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Следовательно, $|x_2| \le \sqrt{4p/3}$. (Эта оценка справедлива для каждого из корней.)

Осталось заметить, что при $p = 13$ получаем $|x_2| \le \sqrt{52/3}$, значит, $x_2 \le 4$, а числа 4 и -1 являются корнями исходного уравнения при $a = -1/3$ (уравнение принимает вид $x^2/9 - x/3 - 4/9 = 0$).

Ответ: 4

Задание №8. Суммы пар цифр числа

Вариант 1 задания №8

Найдите наибольшее пятизначное число, у которого суммы: первой и второй цифр, второй и третьей цифр, третьей и четвёртой цифр, четвёртой и пятой цифр, пятой и первой цифр (т.е. пять сумм) являются простыми числами.

Решение:

Заметим, что если существует удовлетворяющее условию число, у которого первая цифра 9, то и у самого большого такого числа первая цифра будет 9. Будем искать именно такое число, т.е. в дальнейшем предполагать, что одна из цифр равна 9.

Расставим числа по кругу так, чтобы указанные в условии пары чисел оказались соседними в этом кругу. Тогда сумма любых двух соседних цифр – простое число. Заметим, что соседом нечетного числа должно быть четное, а соседом четного должно быть нечетное, поскольку сумма двух чисел одной четности делится на 2; единственные исключения – это 1 рядом с 1 и 0 рядом с 2, так как единственное четное простое число – это 2.

Количество цифр числа нечетно, поэтому четные и нечетные цифры в кругу не могут чередоваться. Следовательно, обязательно найдутся

(1) (первый случай) два нечетных числа, стоящих рядом, и эти числа равны 1,
(2) (второй случай) или два четных числа, стоящих рядом, и эти числа 2 и 0.

Первый случай. Соседние числа с 9 четные, и еще есть два числа 1. Самая большая цифра, дающая и в сумме с 9 и в сумме с 1 простое число, – это 4. Значит, по кругу стоят числа 9, 4, 1, 1, 4.

Второй случай. Чётности чисел таковы: 0, 2, Н, Ч, Н (Н – нечетное, Ч – четное). Тогда 9 может стоять только рядом с 2. Отсюда Ч может быть равно 8, 4 или 2. Следовательно, возможные варианты чисел по кругу:

- 0, 2, 9, 8, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 4, 7 (7 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 2, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)

Осталось перейти обратно к числу из условия.

Примечание. Поскольку при получении ответа в любом из двух случаев задание фактически решено (проделаны все ключевые шаги), было принято решение засчитывать оба ответа: как 98502, так и 94114.

Ответ: 98502

Вариант 2 задания №8

Найдите наибольшее пятизначное число, у которого суммы: первой и третьей цифр, третьей и пятой цифр, пятой и второй цифр, второй и четвёртой цифр, четвёртой и первой цифр (т.е. пять сумм) являются простыми числами.

Решение:

Заметим, что если существует удовлетворяющее условию число, у которого первая цифра 9, то и у самого большого такого числа первая цифра будет 9. Будем искать именно такое число, т.е. в дальнейшем предполагать, что одна из цифр равна 9.

Расставим числа по кругу так, чтобы указанные в условии пары чисел оказались соседними в этом кругу. Тогда сумма любых двух соседних цифр – простое число. Заметим, что соседом нечетного числа должно быть четное, а соседом четного должно быть нечетное, поскольку сумма двух чисел одной четности делится на 2; единственные исключения – это 1 рядом с 1 и 0 рядом с 2, так как единственное четное простое число – это 2.

Количество цифр числа нечетно, поэтому четные и нечетные цифры в кругу не могут чередоваться. Следовательно, обязательно найдутся

(1) (первый случай) два нечетных числа, стоящих рядом, и эти числа равны 1,

(2) (второй случай) или два четных числа, стоящих рядом, и эти числа 2 и 0.

Первый случай. Соседние числа с 9 четные, и еще есть два числа 1. Самая большая цифра, дающая и в сумме с 9 и в сумме с 1 простое число, – это 4. Значит, по кругу стоят числа 9, 4, 1, 1, 4.

Второй случай. Чётности чисел таковы: 0, 2, Н, Ч, Н (Н – нечетное, Ч – четное). Тогда 9 может стоять только рядом с 2. Отсюда Ч может быть равно 8, 4 или 2. Следовательно, возможные варианты чисел по кругу:

- 0, 2, 9, 8, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 4, 7 (7 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 2, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)

Осталось перейти обратно к числу из условия.

Примечание. Поскольку при получении ответа в любом из двух случаев задание фактически решено (проделаны все ключевые шаги), было принято решение засчитывать оба ответа: 97240 и 91441.

Ответ: 97240

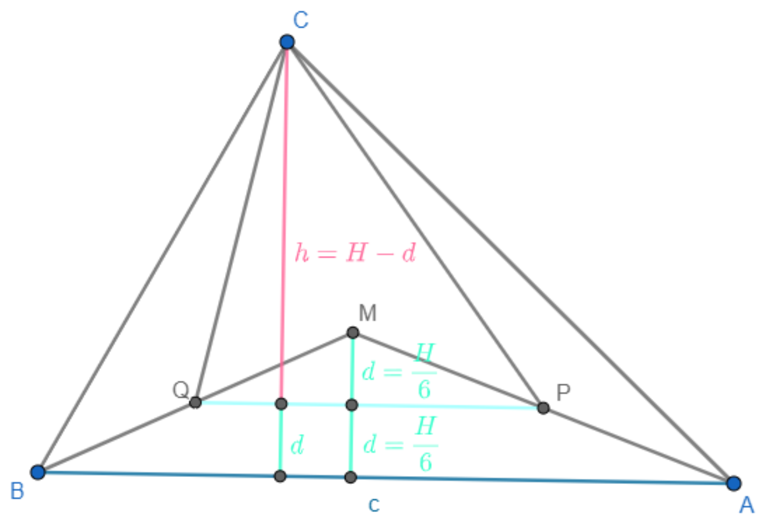
Задание №9. Треугольник в треугольнике

Вариант 1 задания №9

В треугольнике ABC проведены медианы AK и BL, пересекающиеся в точке M. Пусть P – середина отрезка AM, а Q – середина отрезка BM. Известно, что площадь треугольника PCQ равна 10. Чему равна площадь треугольника ABC?

Решение:

Обозначим площадь треугольника ABC за S. Запишем площадь треугольника PCQ как $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h$, где h — расстояние от точки C до прямой PQ.



Заметим, что $PQ = AB/2 = c/2$ как средняя линия в треугольнике AMB. Пусть d — расстояние между параллельными прямыми AB и PQ. Тогда $d + h = H$, где H — высота треугольника ABC из вершины C. В то же время d вдвое меньше высоты треугольника AMB из вершины M, которая, как известно, втрое меньше H. Таким образом, $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$ и $h = H - d = \frac{5}{6}H$. Следовательно,

$$[PCQ] = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{5}{6}h = \frac{5}{24}ch = \frac{5}{12}S.$$

Отсюда $S = \frac{12}{5}[PCQ]$.

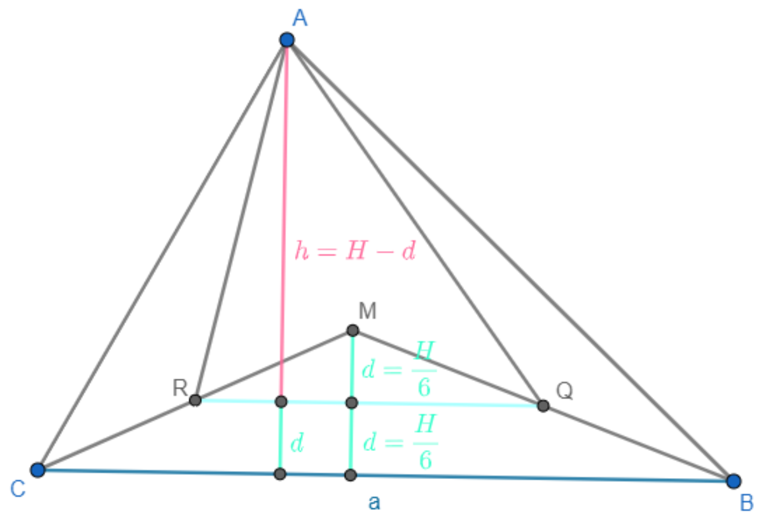
Ответ: 24

Вариант 2 задания №9

В треугольнике ABC проведены медианы BL и CN, пересекающиеся в точке M. Пусть Q – середина отрезка BM, а R – середина CM. Известно, что площадь треугольника QAR равна 15. Чему равна площадь треугольника ABC?

Решение:

Обозначим площадь треугольника ABC за S. Запишем площадь треугольника QAR как $\frac{1}{2} \cdot QR \cdot h$, где h — расстояние от точки A до прямой QR.



Заметим, что $QR = BC/2 = a/2$ как средняя линия в треугольнике BMC. Пусть d — расстояние между параллельными прямыми BC и QR. Тогда $d + h = H$, где H — высота треугольника ABC из вершины A. В то же время d вдвое меньше высоты треугольника BMC из вершины M, которая, как известно, втрое меньше H. Таким образом, $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$ и $h = H - d = \frac{5}{6}H$. Следовательно,

$$[QAR] = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{5}{6}h = \frac{5}{24}ah = \frac{5}{12}S.$$

Отсюда $S = \frac{12}{5}[QAR]$.

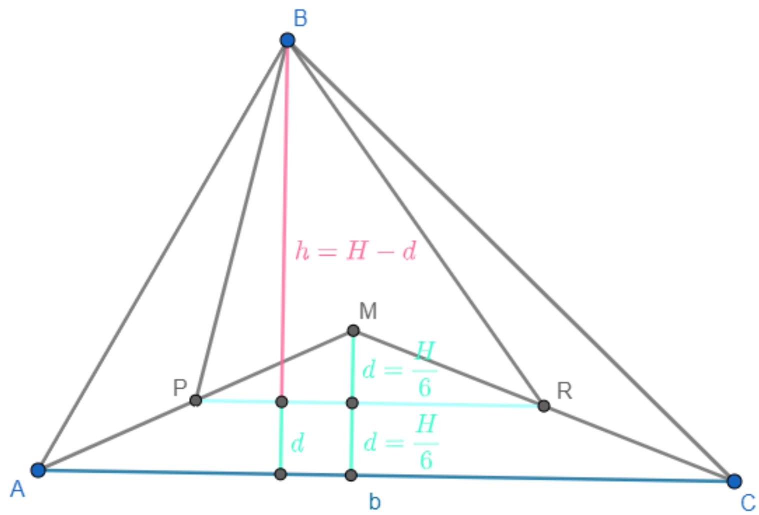
Ответ: 36

Вариант 3 задания №9

В треугольнике ABC проведены медианы CN и AK, пересекающиеся в точке M. Пусть R – середина отрезка CM, а P – середина отрезка AM. Известно, что площадь треугольника RBP равна 20. Чему равна площадь треугольника ABC?

Решение:

Обозначим площадь треугольника ABC за S. Запишем площадь треугольника RBP как $\frac{1}{2} \cdot RP \cdot h$, где h — расстояние от точки B до прямой RP.



Заметим, что $RP = CA/2 = b/2$ как средняя линия в треугольнике CMA. Пусть d — расстояние между параллельными прямыми CA и RP. Тогда $d + h = H$, где H — высота треугольника ABC из вершины B. В то же время d вдвое меньше высоты треугольника CMA из вершины M, которая, как известно, втрое меньше H. Таким образом, $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$ и $h = H - d = \frac{5}{6}H$. Следовательно,

$$[RBP] = \frac{1}{2} \cdot RP \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{5}{6}h = \frac{5}{24}bh = \frac{5}{12}S.$$

Отсюда $S = \frac{12}{5}[RBP]$.

Ответ: 48

Задание №10. Слишком много дробей

Вариант 1 задания №10

На доске написано несколько различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем. Их сумма равна 1. Известно, что одна из этих дробей равна $\frac{1}{43}$. Какое минимальное количество дробей могло быть написано?

Решение:

Пример: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42\cdot 43}+\frac{1}{43}=1$

Оценка:

Пусть получилось представить 1 как сумму четырех дробей, одна из которых $1/43$. Тогда три оставшиеся дроби дают в сумме $42/43$. Следовательно, максимальная из них больше или равна $14/43>1/4$. Т.е. максимальная дробь равна $1/2$ или $1/3$. Разберем оба случая.

Пусть максимальная дробь равна $1/3$. Если вторая по максимальности дробь меньше или равна $1/4$, то сумма не больше $1/3+1/4+1/4+1/43<1$. Таким образом, в этом случае возможен только вариант $1/3+1/3+1/N+1/43=1$. Решив уравнение, получаем, что N не целое.

Пусть максимальная дробь равна $1/2$. Аналогично предыдущему случаю вторая по максимальности дробь больше, чем $1/5$, и меньше, чем $1/2$. Получаем два случая $1/2+1/3+1/N+1/43=1$ или $1/2+1/4+1/N+1/43=1$. Решая каждое из этих уравнений получаем, что корень не целый.

Ответ: 5

Вариант 2 задания №10

На доске написано несколько различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем. Их сумма равна 1. Известно, что одна из этих дробей равна $\frac{1}{21}$. Какое минимальное количество дробей могло быть написано?

Решение:

Пример: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20\cdot 21}+\frac{1}{21}=1$

Оценка:

Пусть получилось представить 1 как сумму четырех дробей, одна из которых $1/21$. Тогда три оставшиеся дроби дают в сумме $20/21$. Следовательно, максимальная из них больше или равна $20/63>1/4$. Т.е. максимальная дробь равна $1/2$ или $1/3$. Разберем оба случая.

Пусть максимальная дробь равна $1/3$. Если вторая по максимальности дробь меньше или равна $1/4$, то сумма не больше $1/3+1/4+1/4+1/21<1$. Таким образом, в этом случае возможен только вариант $1/3+1/3+1/N+1/21=1$. Решив уравнение, получаем, что N не целое.

Пусть максимальная дробь равна $1/2$. Аналогично предыдущему случаю вторая по максимальности дробь больше, чем $1/5$, и меньше, чем $1/2$. Получаем два случая$1/2+1/3+1/N+1/21=1$ или $1/2+1/4+1/N+1/21=1$. Решая каждое из этих уравнений, получаем, что корень не целый.

Ответ: 5

Вариант 3 задания №10

На доске написано несколько различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем. Их сумма равна 1. Известно, что одна из этих дробей равна $\frac{1}{13}$. Какое минимальное количество дробей могло быть написано?

Решение:

Пример: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{13}=1$

Оценка:

Пусть получилось представить 1 как сумму четырех дробей, одна из которых $1/13$. Тогда три оставшиеся дроби дают в сумме $12/13$. Следовательно, максимальная из них больше или равна $4/13>1/4$. Т.е. максимальная дробь равна $1/2$ или $1/3$. Разберем оба случая.

Пусть максимальная дробь равна $1/3$. Если вторая по максимальности дробь меньше или равна $1/4$ то сумма не больше $1/3+1/4+1/4+1/13<1$. Таким образом, в этом случае возможен только вариант $1/3+1/3+1/N+1/13=1$. Решив уравнение получаем, что N не целое.

Пусть максимальная дробь равна $1/2$. Аналогично предыдущему случаю вторая по максимальности дробь больше, чем $1/5$ и меньше, чем $1/2$. Получаем два случая $1/2+1/3+1/N+1/13=1$ или $1/2+1/4+1/N+1/13=1$. Решая каждое из этих уравнений, получаем, что корень не целый.

Ответ: 5