ВЗЛЁТ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

**11 класс**

10 заданий по 5 баллов
(максимум 50 баллов)
продолжительность 120 минут

# Задание №1. Музеи

## Вариант 1 задания №1

Во время каникул 23 школьника из 1«А» вместе с классным руководителем сходили в Третьяковскую галерею, 19 школьников сходили в Пушкинский музей, 5 школьников посетили Музей космонавтики. Какое наименьшее количество школьников могло быть в таком классе, если известно, что каждый мог посетить не более 2 музеев?

*Решение:*

Заметим, что в классе не могло быть меньше 24 школьников: если бы было максимум 23 школьника, то они все должны были бы сходить в Третьяковку, тогда 19 из них должны были бы посетить Пушкинский музей и остается 4 школьников для похода в третий музей. Так как в Музей космонавтики сходило 5, то минимум 1 человек должен был сходить во все три музея. Пример для 24 учеников в классе: 1-23 идут в Третьяковку, 1-19 идут в Пушкинский музей, 24 и 20-24 идут в Музей Космонавтики.

*Ответ:* 24 ученика.

## Вариант 2 задания №1

Во время каникул 25 школьников из 1«Б» вместе с классным руководителем сходили в Третьяковскую галерею, 16 школьников сходили в Пушкинский музей, 10 школьников посетили Музей космонавтики. Какое наименьшее количество школьников могло быть в таком классе, если известно, что каждый мог посетить не более 2 музеев?

*Решение:*

Заметим, что в классе не могло быть меньше 26 школьников: если бы было максимум 25 школьника, то они все должны были бы сходить в Третьяковку, тогда 16 из них должны были бы посетить Пушкинский музей и остается 9 школьников для похода в третий музей. Так как в Музей космонавтики сходило 10, то минимум 1 человек должен был сходить во все три музея. Пример для 26 учеников в классе: 1-25 идут в Третьяковку, 1-16 идут в Пушкинский музей, 26 и 17-26 идут в Музей Космонавтики.

*Ответ:* 26 ученика.

## Вариант 3 задания №1

Во время каникул 24 школьника из 1«В» вместе с классным руководителем сходили в Третьяковскую галерею, 15 школьников сходили в Пушкинский музей, 10 школьников посетили Музей космонавтики. Какое наименьшее количество школьников могло быть в таком классе, если известно, что каждый мог посетить не более 2 музеев?

*Решение:*

Заметим, что в классе не могло быть меньше 25 школьников: если бы было максимум 24 школьника, то они все должны были бы сходить в Третьяковку, тогда 15 из них должны были бы посетить Пушкинский музей и остается 9 школьников для похода в третий музей. Так как в Музей космонавтики сходило 10, то минимум 1 человек должен был сходить во все три музея. Пример для 25 учеников в классе: 1-24 идут в Третьяковку, 1-15 идут в Пушкинский музей, 25 и 16-25 идут в Музей Космонавтики.

*Ответ:* 25 учеников.

ВЗЛЁТ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

# Задание №2. Метро

## Вариант 1 задания №2

Король приказал построить в городе метро, причём в нем должно быть 101 линия и любые две линии должны пересекаться ровно в одной общей пересадочной станции. Кроме того, ровно в одной станции должны сходиться три линии, а больше таких станций быть не должно. Сколько пересадочных станций придётся построить?

*Решение:*

Если бы не было станций, через которые проходили бы более двух линий, то в городе должно было бы быть $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$ станций (каждая из линий пересекается с остальными 100, каждое пересечение считается два раза (для одной линии и для другой), поэтому делим на 2).

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно три линии, то эта пересадочная станция объединяет три двойных, и тогда ответ $5050 - 2 = 5048$.
Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно $k > 3$ линий, то эта пересадочная станция объединяет $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных, и тогда ответ $5050 - \frac{k(k-1)}{2} + 1$. Засчитывались все ответы, получающиеся по этой формуле при $k \in \{3, 4, 5, ..., 101\}$. Не засчитывались ответы, при которых станций, через которые проходит три или более линий, более одной, т.к. если через станцию проходит $k > 3$ линий, то и 3 линии через неё проходят.

*Ответ:* 5048, 5045, 5041, 5036, 5030, 5023, 5015, 5006, 4996, 4985, 4973, 4960, 4946, 4931, 4915, 4898, 4880, 4861, 4841, 4820, 4798, 4775, 4751, 4726, 4700, 4673, 4645, 4616, 4586, 4555, 4523, 4490, 4456, 4421, 4385, 4348, 4310, 4271, 4231, 4190, 4148, 4105, 4061, 4016, 3970, 3923, 3875, 3826, 3776, 3725, 3673, 3620, 3566, 3511, 3455, 3398, 3340, 3281, 3221, 3160, 3098, 3035, 2971, 2906, 2840, 2773, 2705, 2636, 2566, 2495, 2423, 2350, 2276, 2201, 2125, 2048, 1970, 1891, 1811, 1730, 1648, 1565, 1481, 1396, 1310, 1223, 1135, 1046, 956, 865, 773, 680, 586, 491, 395, 298, 200, 101, 1

## Вариант 2 задания №2

Король приказал построить в городе метро, причём в нем должно быть 102 линии и любые две линии должны пересекаться ровно в одной общей пересадочной станции. Кроме того, ровно в одной станции должны сходиться три линии, а больше таких станций быть не должно. Сколько пересадочных станций придётся построить?

*Решение:*

Если бы не было станций, через которые проходили бы более двух линий, то в городе должно было бы быть $\dfrac{102 \cdot 101}{2} = 5151$ станций (каждая из линий пересекается с остальными 101, каждое пересечение считается два раза (для одной линии и для другой), поэтому делим на 2).

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно три линии, то эта пересадочная станция объединяет три двойных, и тогда ответ $5151 - 2 = 5149$.

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно $k > 3$ линий, то эта пересадочная станция объединяет $\dfrac{k(k-1)}{2}$ двойных, и тогда ответ $5151 - \dfrac{k(k-1)}{2} + 1$.

Засчитывались все ответы, получающиеся по этой формуле при $k \in \{3, 4, 5, ..., 102\}$. Не засчитывались ответы, при которых станций, через которые проходит три или более линий, более одной, т.к. если через станцию проходит $k > 3$ линий, то и 3 линии через неё проходят.

*Ответ:* 5149, 5146, 5142, 5137, 5131, 5124, 5116, 5107, 5097, 5086, 5074, 5061, 5047, 5032, 5016, 4999, 4981, 4962, 4942, 4921, 4899, 4876, 4852, 4827, 4801, 4774, 4746, 4717, 4687, 4656, 4624, 4591, 4557, 4522, 4486, 4449, 4411, 4372, 4332, 4291, 4249, 4206, 4162, 4117, 4071, 4024, 3976, 3927, 3877, 3826, 3774, 3721, 3667, 3612, 3556, 3499, 3441, 3382, 3322, 3261, 3199, 3136, 3072, 3007, 2941, 2874, 2806, 2737, 2667, 2596, 2524, 2451, 2377, 2302, 2226, 2149, 2071, 1992, 1912, 1831, 1749, 1666, 1582, 1497, 1411, 1324, 1236, 1147, 1057, 966, 874, 781, 687, 592, 496, 399, 301, 202, 102, 1

## Вариант 3 задания №2

Король приказал построить в городе метро, причём в нем должно быть 100 линий и любые две линии должны пересекаться ровно в одной общей пересадочной станции.

Кроме того, ровно в одной станции должны сходиться три линии, а больше таких станций быть не должно.
Сколько пересадочных станций придётся построить?

*Решение:*

Если бы не было станций, через которые проходили бы более двух линий, то в городе должно было бы быть $\dfrac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ станций (каждая из линий пересекается с остальными 99, каждое пересечение считается два раза (для одной линии и для другой), поэтому делим на 2).

Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно три линии, то эта пересадочная станция объединяет три двойных, и тогда ответ $4950 - 2 = 4948$.
Если через ровно одну пересадочную станцию проходят ровно $k > 3$ линий, то эта пересадочная станция объединяет $\dfrac{k(k-1)}{2}$ двойных, и тогда ответ $4950 - \dfrac{k(k-1)}{2} + 1$.
Засчитывались все ответы, получающиеся по этой формуле при $k \in \{3, 4, 5, ..., 100\}$. Не засчитывались ответы, при которых станций, через которые проходит три или более линий, более одной, т.к. если через станцию проходит $k > 3$ линий, то и 3 линии через неё проходят.

*Ответ:* 4948, 4945, 4941, 4936, 4930, 4923, 4915, 4906, 4896, 4885, 4873, 4860, 4846, 4831, 4815, 4798, 4780, 4761, 4741, 4720, 4698, 4675, 4651, 4626, 4600, 4573, 4545, 4516, 4486, 4455, 4423, 4390, 4356, 4321, 4285, 4248, 4210, 4171, 4131, 4090, 4048, 4005, 3961, 3916, 3870, 3823, 3775, 3726, 3676, 3625, 3573, 3520, 3466, 3411, 3355, 3298, 3240, 3181, 3121, 3060, 2998, 2935, 2871, 2806, 2740, 2673, 2605, 2536, 2466, 2395, 2323, 2250, 2176, 2101, 2025, 1948, 1870, 1791, 1711, 1630, 1548, 1465, 1381, 1296, 1210, 1123, 1035, 946, 856, 765, 673, 580, 486, 391, 295, 198, 100, 1

# Задание №3. Очень вместительная доска

## Вариант 1 задания №3

На доске написаны числа, среди которых есть различные.

Известно, что для каждого из написанных чисел на доске найдутся 2020 других написанных чисел, среднее арифметическое которых равно этому числу. Какое минимальное количество чисел могло быть написано на доске?

*Напоминаем: среднее арифметическое чисел* $x_1, x_2, ..., x_n$ *– это* $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

*Решение:*

Пусть $2020 = N$.

Рассмотрим самое маленькое число из написанных. Оно может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Аналогично, самое большое число может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Таким образом, на доске написано не менее $1 + N + 1 + N = 2N + 2$ чисел.

Очевидно, что набор из $N + 1$ чисел, равных $a$, и $N + 1$ чисел, равных $b$, удовлетворяют условию $(a \neq b)$.

*Ответ:* 4042 числа

## Вариант 2 задания №3

На доске написаны числа, среди которых есть различные.

Известно, что для каждого из написанных чисел на доске найдутся 1009 других написанных чисел, среднее арифметическое которых равно этому числу. Какое минимальное количество чисел могло быть написано на доске?

*Напоминаем: среднее арифметическое чисел* $x_1, x_2, ..., x_n$ *– это* $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

*Решение:*

Пусть $1009 = N$.

Рассмотрим самое маленькое число из написанных. Оно может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Аналогично, самое большое число может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел.

Таким образом, на доске написано не менее $1 + N + 1 + N = 2N + 2$ чисел (одно самое маленькое, ещё $N$ равных самому маленькому, и одно самое большое и ещё $N$ равных самому большому).

Очевидно, что набор из $N + 1$ чисел, равных $a$, и $N + 1$ чисел, равных $b$, удовлетворяют условию ($a \neq b$).

*Ответ:* 2020

## Вариант 3 задания №3

На доске написаны числа, среди которых есть различные.

Известно, что для каждого из написанных чисел на доске найдутся 1527 других написанных чисел, среднее арифметическое которых равно этому числу. Какое минимальное количество чисел могло быть написано на доске?

*Напоминаем: среднее арифметическое чисел* $x_1, x_2, ..., x_n$ *– это* $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

*Решение:*

Пусть $1527 = N$.

Рассмотрим самое маленькое число из написанных. Оно может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел. Аналогично, самое большое число может быть равно среднему арифметическому только равных ему чисел.

Таким образом, на доске написано не менее $1 + N + 1 + N = 2N + 2$ чисел (одно самое маленькое, ещё $N$ равных самому маленькому, и одно самое большое и ещё $N$ равных самому большому).

Очевидно, что набор из $N + 1$ чисел, равных $a$, и $N + 1$ чисел, равных $b$, удовлетворяют условию ($a \neq b$).

*Ответ:* 3056

## Задание №4. Арбузы на день рождения

### Вариант 1 задания №4

Компания для дня рождения купила в магазине 6 арбузов общей массой 30 кг. Масса каждого арбуза не превышает 10 кг. Какого наименьшего количества пакетов ЗАВЕДОМО хватит, чтобы унести все арбузы, если один пакет выдерживает груз массой не более 10 кг (масса арбуза может быть не целым числом).

*Решение:*

Докажем, что 4 пакетов не хватит. Для этого возьмем арбузы массой 6 кг, 6 кг, 6 кг, 6 кг, 5 кг и 1 кг, Нетрудно заметить, что унести в 4 пакетах эти арбузы не удастся (в любой пакет с арбузом в 6 кг нельзя положить 5 кг арбуз, значит, пакетов нужно не менее 5). Докажем, что 5 пакетов всегда хватит. Упорядочим арбузы по невозрастанию массы: сначала самый тяжелый (если таких несколько, выберем любой из них), потом легче и т.д. Посмотрим на сумму в этом ряду четвертого арбуза и последнего (шестого): если их можно положить в один пакет, то 5 пакетов заведомо хватит, так как осталось 4 арбуза; если их нельзя положить в один пакет, их сумма больше 10 кг, тогда четвертый арбуз весит больше 5 кг, значит, первый, второй и третий также весят больше 5 кг, но тогда суммарный вес пятого и шестого арбуза должны быть меньше 10 кг и их можно поместить в последний пятый пакет (для первых четырех арбузов четырех пакетов хватит).

*Ответ:* 5 пакетов

### Вариант 2 задания №4

Компания для дня рождения купила в магазине 8 арбузов общей массой 48 кг. Масса каждого арбуза не превышает 12 кг. Какого наименьшего количества пакетов ЗАВЕДОМО хватит, чтобы унести все арбузы, если один пакет выдерживает груз массой не более 12 кг (масса арбуза может быть не целым числом).

*Решение:*

Докажем, что 6 пакетов не хватит. Для этого возьмем арбузы массой 7 кг, 7 кг, 7 кг, 7 кг, 7 кг, 7 кг, 5,5 кг и 0,5 кг, Нетрудно заметить, что унести в 6 пакетах эти арбузы не удастся (в любой пакет с арбузом в 7кг нельзя положить арбуз с весом 5,5 кг, значит, пакетов нужно не менее 7). Докажем, что 7 пакетов всегда хватит. Упорядочим арбузы по невозрастанию массы: сначала самый тяжелый (если таких несколько, выберем любой из них), потом легче и т.д. Посмотрим на сумму в этом ряду шестого арбуза и последнего (восьмого): если их можно положить в один пакет, то 7 пакетов заведомо хватит, так как осталось 6 арбузов; если их нельзя положить в один пакет, их сумма больше 12 кг, тогда шестой арбуз весит больше 6 кг, значит, первый, второй, третий, четвертый и пятый также весят больше 6 кг, но тогда суммарный вес седьмого и восьмого арбуза должны быть меньше $48-36=12$ кг и их можно поместить в последний седьмой пакет (для первых шести арбузов шести пакетов хватит).

*Ответ:* 7 пакетов

## Вариант 3 задания №4

Компания для дня рождения купила в магазине 5 арбузов общей массой 30 кг. Масса каждого арбуза не превышает 12 кг. Какого наименьшего количества пакетов ЗАВЕДОМО хватит, чтобы унести все арбузы, если один пакет выдерживает груз массой не более 12 кг (масса арбуза может быть не целым числом).

*Решение:*

Докажем, что 3 пакетов не хватит. Для этого возьмем арбузы массой 7 кг, 7 кг, 7 кг, 7 кг и 2 кг, Нетрудно заметить, что унести в 3 пакетах эти арбузы не удастся (для любого арбуза весом в 7 кг нужен отдельный пакет). Докажем, что 4 пакетов всегда хватит. Упорядочим арбузы по невозрастанию массы: сначала самый тяжелый (если таких несколько, выберем любой из них), потом легче и т.д. Посмотрим на сумму в этом ряду третьего арбуза и последнего (пятого): если их можно положить в один пакет, то 4 пакетов заведомо хватит, так как осталось 3 арбуза; если их нельзя положить в один пакет, их сумма больше 12кг, тогда третий арбуз весит больше 6 кг, значит, первый и второй также весят больше 6 кг, но тогда суммарный вес четвертого и пятого арбуза должны быть меньше $30 - 18 = 12$ кг и их можно поместить в последний седьмой пакет (для первых трех арбузов трех пакетов хватит).

*Ответ:* 4 пакетов

# Задание №6. Не вписанный прямоугольник

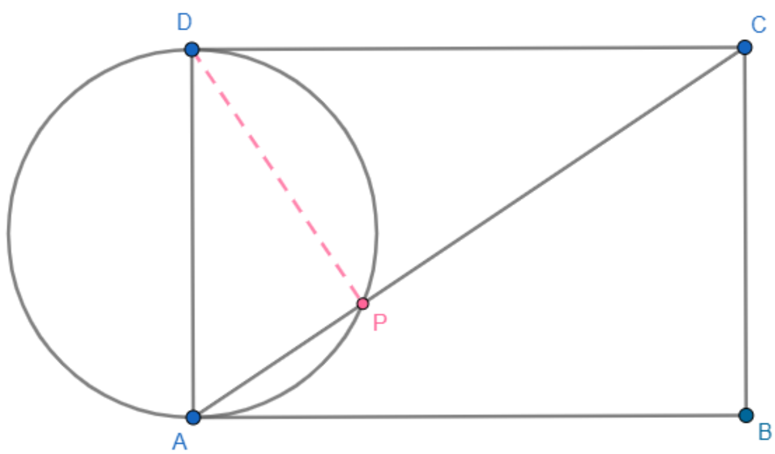
## Вариант 1 задания №6

Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки $A$ и $D$, касается прямой $CD$ и пересекает диагональ $AC$ в точке $P$. Найдите длину отрезка $DP$, если $AP = \sqrt{7}$, $AB = 14\sqrt{2}$.

*Решение:*

Пусть $AP = p$, $AB = b$, $DP = x$.

Ясно, что $CD = AB = b$. По свойству касательной и секущих из одной точки $CP \cdot CA = CD^2 = b^2$.




Поскольку $AD$ является диаметром данной в условии окружности, то $DP \perp AC$. По свойству высоты прямоугольного треугольника (применительно к $\triangle ADC$) $x^2 = DP^2 = AP \cdot CP = p \cdot CP$, откуда $CP = \frac{x^2}{p}$, $CA = p + \frac{x^2}{p}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{p} \cdot \left(p + \frac{x^2}{p}\right) = b^2$$

Упрощая, получаем $x^4 + p^2x^2 - p^2b^2 = 0$ — квадратное уравнение относительно $x^2$. Решая (и учитывая, что $x > 0$), получаем $x = \sqrt{\frac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2b^2}}{2}}$.

*Ответ:* 7

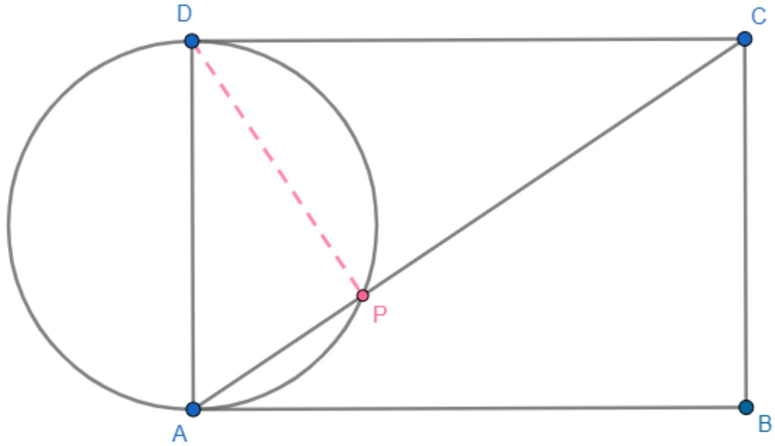
## Вариант 2 задания №6

Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки $A$ и $D$, касается прямой $CD$ и пересекает диагональ $AC$ в точке $P$. Найдите длину отрезка $DP$, если $AP = \sqrt{11}$, $AB = 22\sqrt{3}$.

*Решение:*

Пусть $AP = p$, $AB = b$, $DP = x$.

Ясно, что $CD = AB = b$. По свойству касательной и секущих из одной точки $CP \cdot CA = CD^2 = b^2$.




Поскольку $AD$ является диаметром данной в условии окружности, то $DP \perp AC$. По свойству высоты прямоугольного треугольника (применительно к $\triangle ADC$) $x^2 = DP^2 = AP \cdot CP = p \cdot CP$, откуда $CP = \dfrac{x^2}{p}$, $CA = p + \dfrac{x^2}{p}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{p} \cdot \left(p + \frac{x^2}{p}\right) = b^2$$

Упрощая, получаем $x^4 + p^2x^2 - p^2b^2 = 0$ — квадратное уравнение относительно $x^2$. Решая (и учитывая, что $x > 0$), получаем $x = \sqrt{\dfrac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2b^2}}{2}}$.

*Ответ:* 11

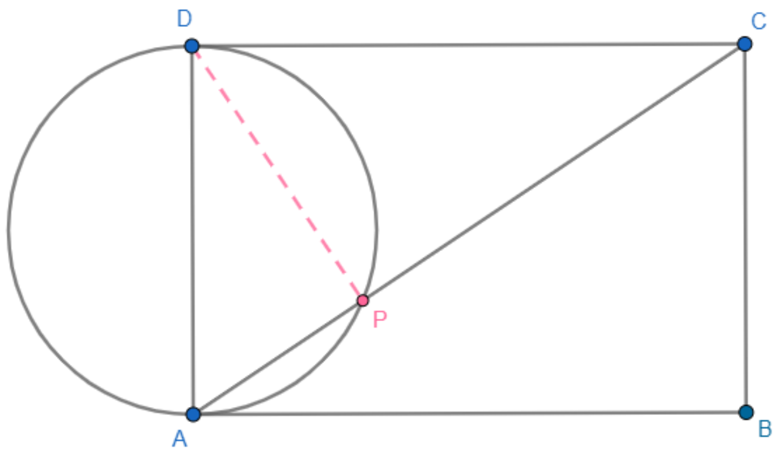
## Вариант 3 задания №6

Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки $A$ и $D$, касается прямой $CD$ и пересекает диагональ $AC$ в точке $P$. Найдите длину отрезка $DP$, если $AP = 3$, $AB = 9\sqrt{10}$.

*Решение:*

Пусть $AP = p$, $AB = b$, $DP = x$.

Ясно, что $CD = AB = b$. По свойству касательной и секущих из одной точки $CP \cdot CA = CD^2 = b^2$.




Поскольку $AD$ является диаметром данной в условии окружности, то $DP \perp AC$. По свойству высоты прямоугольного треугольника (применительно к $\triangle ADC$) $x^2 = DP^2 = AP \cdot CP = p \cdot CP$, откуда $CP = \dfrac{x^2}{p}$, $CA = p + \dfrac{x^2}{p}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{p} \cdot \left(p + \frac{x^2}{p}\right) = b^2$$

Упрощая, получаем $x^4 + p^2x^2 - p^2b^2 = 0$ — квадратное уравнение относительно $x^2$. Решая (и учитывая, что $x > 0$), получаем $x = \sqrt{\dfrac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2b^2}}{2}}$.

*Ответ:* 9

# Задание №6. И корни целы, и математики сыты

## Вариант 1 задания №6

Ненулевое число $a$ таково, что оба корня уравнения ниже – целые числа. Укажите наибольшее число, которое может быть корнем этого уравнения. Уравнение:

$$a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0.$$

*Решение:*

Будем решать задачу для уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - pa^2 = 0$, где вместо $p$ стоит некоторое натуральное число.

Запишем формулы Виета для уравнения из условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{1 - pa^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} - p = (x_1 + x_2)^2 - p.$$

Упрощая второе уравнение, получаем $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$. Умножим на 4:

$$4p = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Следовательно, $|x_2| \leq \sqrt{4p/3}$. (Эта оценка справедлива для каждого из корней.)

Осталось заметить, что при $p = 7$ получаем $|x_2| \leq \sqrt{28/3}$, значит, $x_2 \leq 3$, а числа 3 и $-1$ являются корнями исходного уравнения при $a = -1/2$ (уравнение принимает вид $x^2/4 - x/2 - 3/4 = 0$).

*Ответ:* 3

## Вариант 2 задания №6

Ненулевое число $a$ таково, что оба корня уравнения ниже – целые числа. Укажите наибольшее число, которое может быть корнем этого уравнения. Уравнение:

$$a^2x^2 + ax + 1 - 21a^2 = 0.$$

*Решение:*

Будем решать задачу для уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - pa^2 = 0$, где вместо $p$ стоит некоторое натуральное число.

Запишем формулы Виета для уравнения из условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{1-pa^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} - p = (x_1+x_2)^2 - p.$$

Упрощая второе уравнение, получаем $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$. Умножим на 4:

$$4p = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Следовательно, $|x_2| \le \sqrt{4p/3}$. (Эта оценка справедлива для каждого из корней.)

Осталось заметить, что при $p = 21$ получаем $|x_2| \le \sqrt{28}$, значит, $x_2 \le 5$, а числа 5 и $-1$ являются корнями исходного уравнения при $a = -1/4$ (уравнение принимает вид $x^2/16 - x/4 - 5/16 = 0$).

*Ответ:* 5

## Вариант 3 задания №6

Ненулевое число $a$ таково, что оба корня уравнения ниже – целые числа. Укажите наибольшее число, которое может быть корнем этого уравнения. Уравнение:

$$a^2x^2 + ax + 1 - 13a^2 = 0.$$

*Решение:*

Будем решать задачу для уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - pa^2 = 0$, где вместо $p$ стоит некоторое натуральное число.

Запишем формулы Виета для уравнения из условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{1-pa^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} - p = (x_1+x_2)^2 - p.$$

Упрощая второе уравнение, получаем $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$. Умножим на 4:

$$4p = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Следовательно, $|x_2| \le \sqrt{4p/3}$. (Эта оценка справедлива для каждого из корней.)

Осталось заметить, что при $p = 13$ получаем $|x_2| \le \sqrt{52/3}$, значит, $x_2 \le 4$, а числа 4 и $-1$ являются корнями исходного уравнения при $a = -1/3$ (уравнение принимает вид $x^2/9 - x/3 - 4/9 = 0$).

*Ответ:* 4

# Задание №7. Суммы пар цифр числа

## Вариант 1 задания №7

Найдите наибольшее пятизначное число, у которого суммы: первой и второй цифр, второй и третьей цифр, третьей и четвёртой цифр, четвёртой и пятой цифр, пятой и первой цифр (т.е. пять сумм) являются простыми числами.

*Решение:*

Заметим, что если существует удовлетворяющее условию число, у которого первая цифра 9, то и у самого большого такого числа первая цифра будет 9. Будем искать именно такое число, т.е. в дальнейшем предполагать, что одна из цифр равна 9.

Расставим числа по кругу так, чтобы указанные в условии пары чисел оказались соседними в этом кругу. Тогда сумма любых двух соседних цифр – простое число. Заметим, что соседом нечетного числа должно быть четное, а соседом четного должно быть нечетное, поскольку сумма двух чисел одной четности делится на 2; единственные исключения – это 1 рядом с 1 и 0 рядом с 2, так как единственное четное простое число – это 2.

Количество цифр числа нечетно, поэтому четные и нечетные цифры в кругу не могут чередоваться. Следовательно, обязательно найдутся

(1) (первый случай) два нечетных числа, стоящих рядом, и эти числа равны 1,

(2) (второй случай) или два четных числа, стоящих рядом, и эти числа 2 и 0.

**Первый случай.** Соседние числа с 9 четные, и еще есть два числа 1. Самая большая цифра, дающая и в сумме с 9 и в сумме с 1 простое число, – это 4. Значит, по кругу стоят числа 9, 4, 1, 1, 4.

**Второй случай.** Чётности чисел таковы: 0, 2, Н, Ч, Н (Н – нечетное, Ч – четное). Тогда 9 может стоять только рядом с 2. Отсюда Ч может быть равно 8, 4 или 2. Следовательно, возможные варианты чисел по кругу:

- 0, 2, 9, 8, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 4, 7 (7 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 2, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)

Осталось перейти обратно к числу из условия.

**Примечание.** Поскольку при получении ответа в любом из двух случаев задание фактически решено (проделаны все ключевые шаги), было принято решение засчитывать оба ответа: как 98502, так и 94114.

*Ответ:* 98502

## Вариант 2 задания №7

Найдите наибольшее пятизначное число, у которого суммы: первой и третьей цифр, третьей и пятой цифр, пятой и второй цифр, второй и четвёртой цифр, четвёртой и первой цифр (т.е. пять сумм) являются простыми числами.

*Решение:*

Заметим, что если существует удовлетворяющее условию число, у которого первая цифра 9, то и у самого большого такого числа первая цифра будет 9. Будем искать именно такое число, т.е. в дальнейшем предполагать, что одна из цифр равна 9.

Расставим числа по кругу так, чтобы указанные в условии пары чисел оказались соседними в этом кругу. Тогда сумма любых двух соседних цифр – простое число. Заметим, что соседом нечетного числа должно быть четное, а соседом четного должно быть нечетное, поскольку сумма двух чисел одной четности делится на 2; единственные исключения – это 1 рядом с 1 и 0 рядом с 2, так как единственное четное простое число – это 2.

Количество цифр числа нечетно, поэтому четные и нечетные цифры в кругу не могут чередоваться. Следовательно, обязательно найдутся

(1) (первый случай) два нечетных числа, стоящих рядом, и эти числа равны 1,

(2) (второй случай) или два четных числа, стоящих рядом, и эти числа 2 и 0.

**Первый случай.** Соседние числа с 9 четные, и еще есть два числа 1. Самая большая цифра, дающая и в сумме с 9 и в сумме с 1 простое число, – это 4. Значит, по кругу стоят числа 9, 4, 1, 1, 4.

**Второй случай.** Чётности чисел таковы: 0, 2, Н, Ч, Н (Н – нечетное, Ч – четное). Тогда 9 может стоять только рядом с 2. Отсюда Ч может быть равно 8, 4 или 2. Следовательно, возможные варианты чисел по кругу:

- 0, 2, 9, 8, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 4, 7 (7 – максимальная допустимая цифра)
- 0, 2, 9, 2, 5 (5 – максимальная допустимая цифра)

Осталось перейти обратно к числу из условия.

**Примечание.** Поскольку при получении ответа в любом из двух случаев задание фактически решено (проделаны все ключевые шаги), было принято решение засчитывать оба ответа: 97240 и 91441.

*Ответ:* 97240

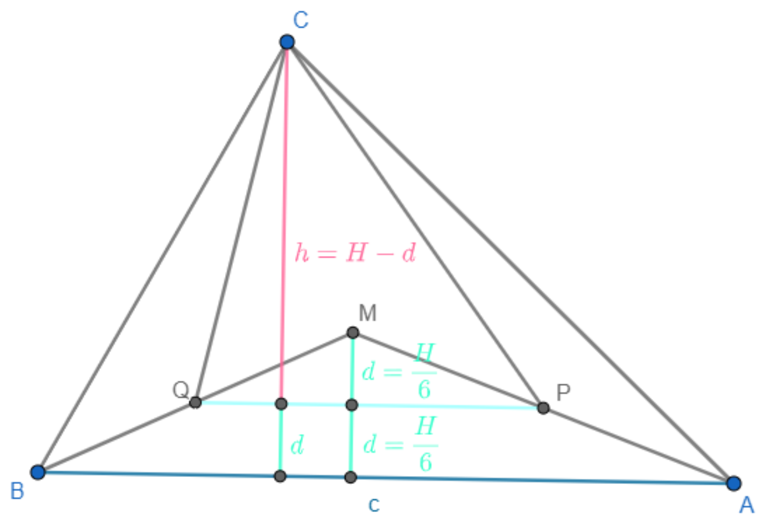
# Задание №8. Треугольник в треугольнике

## Вариант 1 задания №8

В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AK$ и $BL$, пересекающиеся в точке $M$. Пусть $P$ – середина отрезка $AM$, а $Q$ – середина отрезка $BM$. Известно, что площадь треугольника $PCQ$ равна 10. Чему равна площадь треугольника $ABC$?

*Решение:*

Обозначим площадь треугольника $ABC$ за $S$. Запишем площадь треугольника $PCQ$ как $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h$, где $h$ — расстояние от точки $C$ до прямой $PQ$.




Заметим, что $PQ = AB/2 = c/2$ как средняя линия в треугольнике $AMB$. Пусть $d$ — расстояние между параллельными прямыми $AB$ и $PQ$. Тогда $d + h = H$, где $H$ — высота треугольника $ABC$ из вершины $C$. В то же время $d$ вдвое меньше высоты треугольника $AMB$ из вершины $M$, которая, как известно, втрое меньше $H$. Таким образом, $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$ и $h = H - d = \frac{5}{6}H$. Следовательно,

$$[PCQ] = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{5}{6}h = \frac{5}{24}ch = \frac{5}{12}S.$$

Отсюда $S = \frac{12}{5}[PCQ]$.

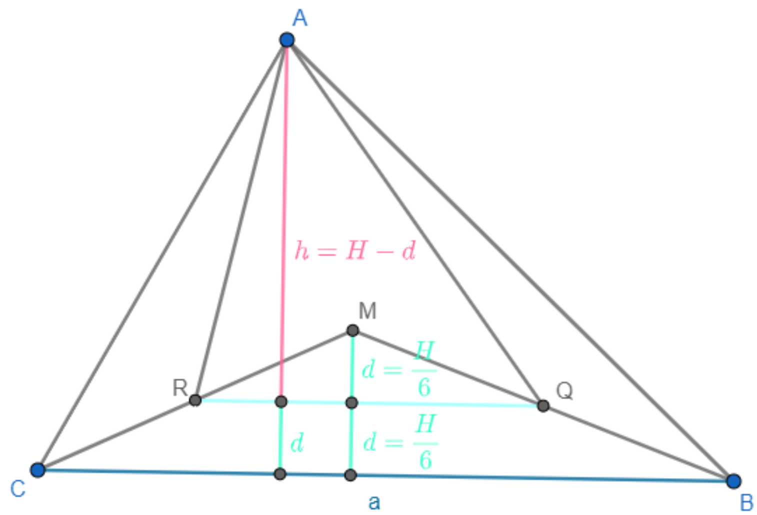
*Ответ:* 24

## Вариант 2 задания №8

В треугольнике $ABC$ проведены медианы $BL$ и $CN$, пересекающиеся в точке $M$. Пусть $Q$ – середина отрезка $BM$, а $R$ – середина $CM$. Известно, что площадь треугольника $QAR$ равна 15. Чему равна площадь треугольника $ABC$?

*Решение:*

Обозначим площадь треугольника $ABC$ за $S$. Запишем площадь треугольника $QAR$ как $\frac{1}{2} \cdot QR \cdot h$, где $h$ — расстояние от точки $A$ до прямой $QR$.




Заметим, что $QR = BC/2 = a/2$ как средняя линия в треугольнике $BMC$. Пусть $d$ — расстояние между параллельными прямыми $BC$ и $QR$. Тогда $d + h = H$, где $H$ — высота треугольника $ABC$ из вершины $A$. В то же время $d$ вдвое меньше высоты треугольника $BMC$ из вершины $M$, которая, как известно, втрое меньше $H$. Таким образом, $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$ и $h = H - d = \frac{5}{6}H$. Следовательно,

$$[QAR] = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{5}{6}h = \frac{5}{24}ah = \frac{5}{12}S.$$

Отсюда $S = \frac{12}{5}[QAR]$.

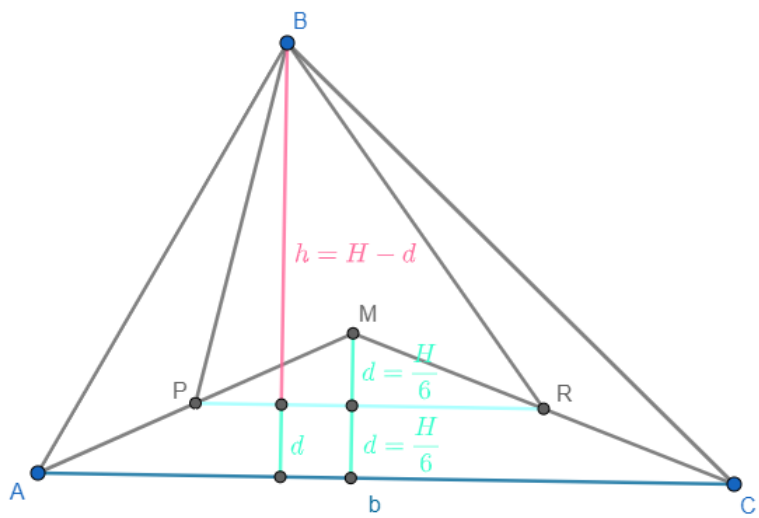
*Ответ:* 36

## Вариант 3 задания №8

В треугольнике $ABC$ проведены медианы $CN$ и $AK$, пересекающиеся в точке $M$. Пусть $R$ – середина отрезка $CM$, а $P$ – середина отрезка $AM$. Известно, что площадь треугольника $RBP$ равна 20. Чему равна площадь треугольника $ABC$?

*Решение:*

Обозначим площадь треугольника $ABC$ за $S$. Запишем площадь треугольника $RBP$ как $\frac{1}{2} \cdot RP \cdot h$, где $h$ — расстояние от точки $B$ до прямой $RP$.




Заметим, что $RP = CA/2 = b/2$ как средняя линия в треугольнике $CMA$. Пусть $d$ — расстояние между параллельными прямыми $CA$ и $RP$. Тогда $d + h = H$, где $H$ — высота треугольника $ABC$ из вершины $B$. В то же время $d$ вдвое меньше высоты треугольника $CMA$ из вершины $M$, которая, как известно, втрое меньше $H$. Таким образом, $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{H}{6}$ и $h = H - d = \frac{5}{6}H$. Следовательно,

$$[RBP] = \frac{1}{2} \cdot RP \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{5}{6}h = \frac{5}{24}bh = \frac{5}{12}S.$$

Отсюда $S = \frac{12}{5}[RBP]$.

*Ответ:* 48

# Задание №9. Слишком много дробей

## Вариант 1 задания №9

На доске написано несколько различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем. Их сумма равна 1. Известно, что одна из этих дробей равна $\frac{1}{43}$. Какое минимальное количество дробей могло быть написано?

*Решение:*

**Пример:** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42\cdot 43}+\frac{1}{43}=1$

**Оценка:**

Пусть получилось представить 1 как сумму четырех дробей, одна из которых $1/43$. Тогда три оставшиеся дроби дают в сумме $42/43$. Следовательно, максимальная из них больше или равна $14/43>1/4$. Т.е. максимальная дробь равна $1/2$ или $1/3$. Разберем оба случая.

Пусть максимальная дробь равна $1/3$. Если вторая по максимальности дробь меньше или равна $1/4$, то сумма не больше $1/3+1/4+1/4+1/43<1$. Таким образом, в этом случае возможен только вариант $1/3+1/3+1/N+1/43=1$. Решив уравнение, получаем, что $N$ не целое.

Пусть максимальная дробь равна $1/2$. Аналогично предыдущему случаю вторая по максимальности дробь больше, чем $1/5$, и меньше, чем $1/2$. Получаем два случая $1/2+1/3+1/N+1/43=1$ или $1/2+1/4+1/N+1/43=1$. Решая каждое из этих уравнений получаем, что корень не целый.

*Ответ:* 5

## Вариант 2 задания №9

На доске написано несколько различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем. Их сумма равна 1. Известно, что одна из этих дробей равна $\frac{1}{21}$. Какое минимальное количество дробей могло быть написано?

*Решение:*

**Пример:** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20\cdot 21}+\frac{1}{21}=1$

**Оценка:**

Пусть получилось представить 1 как сумму четырех дробей, одна из которых $1/21$. Тогда три оставшиеся дроби дают в сумме $20/21$. Следовательно, максимальная из них больше или равна $20/63>1/4$. Т.е. максимальная дробь равна $1/2$ или $1/3$. Разберем оба случая.

Пусть максимальная дробь равна $1/3$. Если вторая по максимальности дробь меньше или равна $1/4$, то сумма не больше $1/3+1/4+1/4+1/21<1$. Таким образом, в этом случае возможен только вариант $1/3+1/3+1/N+1/21=1$. Решив уравнение, получаем, что $N$ не целое.

Пусть максимальная дробь равна $1/2$. Аналогично предыдущему случаю вторая по максимальности дробь больше, чем $1/5$, и меньше, чем $1/2$. Получаем два случая$1/2+1/3+1/N+1/21=1$ или $1/2+1/4+1/N+1/21=1$. Решая каждое из этих уравнений, получаем, что корень не целый.

*Ответ:* 5

## Вариант 3 задания №9

На доске написано несколько различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем. Их сумма равна 1. Известно, что одна из этих дробей равна $\frac{1}{13}$. Какое минимальное количество дробей могло быть написано?

*Решение:*

**Пример:** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{13}=1$

**Оценка:**

Пусть получилось представить 1 как сумму четырех дробей, одна из которых $1/13$. Тогда три оставшиеся дроби дают в сумме $12/13$. Следовательно, максимальная из них больше или равна $4/13>1/4$. Т.е. максимальная дробь равна $1/2$ или $1/3$. Разберем оба случая.

Пусть максимальная дробь равна $1/3$. Если вторая по максимальности дробь меньше или равна $1/4$ то сумма не больше $1/3+1/4+1/4+1/13<1$. Таким образом, в этом случае возможен только вариант $1/3+1/3+1/N+1/13=1$. Решив уравнение получаем, что $N$ не целое.

Пусть максимальная дробь равна $1/2$. Аналогично предыдущему случаю вторая по максимальности дробь больше, чем $1/5$ и меньше, чем $1/2$. Получаем два случая $1/2+1/3+1/N+1/13=1$ или $1/2+1/4+1/N+1/13=1$. Решая каждое из этих уравнений, получаем, что корень не целый.

*Ответ:* 5

# Задание №10. Произведение ненулевых параметров

## Вариант 1 задания №10

Какое наименьшее значение может иметь произведение ненулевых параметров $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 100 \cdot \sin x = a, \\ \operatorname{ctg} x + 100 \cdot \cos x = b \end{cases}$$

имеет решение?

*Решение:*

Обозначим $100 = N$. Перемножив уравнения, получим
$ab = (\operatorname{tg} x + N \sin x)(\operatorname{ctg} x + N \cos x) =$
$= 1 + N(\sin x + \cos x) + N^2 \sin x \cos x =$
$= 1 + N(\sin x + \cos x) + N^2 \cdot \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$.

Пусть $t = \sin x + \cos x$. Тогда нам надо найти минимум функции

$$1 + Nt + N^2 \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{N^2}{2} t^2 + Nt + 1 - \frac{N^2}{2}.$$

Это парабола с ветвями, направленными вверх; ее минимум находится в вершине параболы, т.е. при $t = -\frac{N}{2\frac{N^2}{2}} = -\frac{1}{N}$. Подставив это значение в функцию, получаем $\frac{1}{2} - \frac{N^2}{2}$.

Заметим, что это значение достигается: $\sin x + \cos x$ принимает все значения из отрезка $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, а значит, и значение $-\frac{1}{N}$. Подставив $x$ при котором принимается это значение в два изначальных уравнения, получим $a$ и $b$ дающие нужное произведение.

*Ответ:* $-4999.5$

## Вариант 2 задания №10

Какое наименьшее значение может иметь произведение ненулевых параметров $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 200 \cdot \sin x = a, \\ \operatorname{ctg} x + 200 \cdot \cos x = b \end{cases}$$

имеет решение?

*Решение:*

Обозначим $100 = N$. Перемножив уравнения, получим
$ab = (\operatorname{tg} x + N\sin x)(\operatorname{ctg} x + N\cos x) =$
$= 1 + N(\sin x + \cos x) + N^2 \sin x \cos x =$
$= 1 + N(\sin x + \cos x) + N^2 \cdot \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}.$

Пусть $t = \sin x + \cos x$. Тогда нам надо найти минимум функции

$$1 + Nt + N^2\frac{t^2-1}{2} = \frac{N^2}{2}t^2 + Nt + 1 - \frac{N^2}{2}.$$

Это парабола с ветвями, направленными вверх; ее минимум находится в вершине параболы, т.е. при $t = -\frac{N}{2\frac{N^2}{2}} = -\frac{1}{N}$. Подставив это значение в функцию, получаем $\frac{1}{2} - \frac{N^2}{2}$.

Заметим, что это значение достигается: $\sin x + \cos x$ принимает все значения из отрезка $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, а значит, и значение $-\frac{1}{N}$. Подставив $x$ при котором принимается это значение в два изначальных уравнения, получим $a$ и $b$ дающие нужное произведение.

*Ответ:* $-19999.5$

## Вариант 3 задания №10

Какое наименьшее значение может иметь произведение ненулевых параметров $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 300 \cdot \sin x = a, \\ \operatorname{ctg} x + 300 \cdot \cos x = b \end{cases}$$

имеет решение?

*Решение:*

Обозначим $100 = N$. Перемножив уравнения, получим
$ab = (\operatorname{tg} x + N\sin x)(\operatorname{ctg} x + N\cos x) =$
$= 1 + N(\sin x + \cos x) + N^2 \sin x \cos x =$
$= 1 + N(\sin x + \cos x) + N^2 \cdot \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}.$

Пусть $t = \sin x + \cos x$. Тогда нам надо найти минимум функции

$$1 + Nt + N^2\frac{t^2-1}{2} = \frac{N^2}{2}t^2 + Nt + 1 - \frac{N^2}{2}.$$

Это парабола с ветвями, направленными вверх; ее минимум находится в вершине параболы, т.е. при $t = -\frac{N}{2\frac{N^2}{2}} = -\frac{1}{N}$. Подставив это значение в функцию, получаем $\frac{1}{2} - \frac{N^2}{2}$.

Заметим, что это значение достигается: $\sin x + \cos x$ принимает все значения из отрезка $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, а значит, и значение $-\frac{1}{N}$. Подставив $x$ при котором принимается это значение в два изначальных уравнения, получим $a$ и $b$ дающие нужное произведение.

*Ответ:* $-44999.5$