ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

4 класс

6 заданий по 5 баллов

(максимум 30 баллов)

продолжительность 60 минут

Задание №1 из 6 (4 кл). Незнайка и мороженое

Вариант 1 задания №1

Незнайка хотел купить четыре порции мороженого, но ему не хватило 30 рублей. Тогда он купил три порции мороженого, и у него осталось 20 рублей. Сколько стоит порция мороженого?

Решение:

Из условия знаем, что у Незнайки на 20 рублей больше, чем цена 3-х порций. Но на 30 рублей меньше, чем цена 4-х порций. Значит, цена за 4 порции на 20+30=50 рублей дороже цены 3-х порций. Тогда одна порция мороженого стоит 50 рублей.

Ответ: 50

Вариант 2 задания №1

Незнайка хотел купить четыре порции мороженого, но ему не хватило 20 рублей. Тогда он купил три порции мороженого, и у него осталось 30 рублей. Сколько стоит порция мороженого?

Решение:

Из условия знаем, что у Незнайки на 30 рублей больше, чем цена 3-х порций. Но на 20 рублей меньше, чем цена 4-х порций. Значит, цена за 4 порции на 30+20=50 рублей дороже цены 3-х порций. Тогда одна порция мороженого стоит 50 рублей.

Ответ: 50

Вариант 3 задания №1

Незнайка хотел купить четыре порции мороженого, но ему не хватило 30 рублей. Тогда он купил три порции мороженого, и у него осталось 40 рублей. Сколько стоит порция мороженого?

Решение:

Из условия знаем, что у Незнайки на 40 рублей больше, чем цена 3-х порций. Но на 30 рублей меньше, чем цена 4-х порций. Значит, цена за 4 порции на 40+30=70 рублей дороже цены 3-х порций. Тогда одна порция мороженого стоит 70 рублей.

Ответ: 70

Вариант 4 задания №1

Незнайка хотел купить четыре порции мороженого, но ему не хватило 40 рублей. Тогда он купил три порции мороженого, и у него осталось 30 рублей. Сколько стоит порция мороженого?

Решение:

Из условия знаем, что у Незнайки на 30 рублей больше, чем цена 3-х порций. Но на 40 рублей меньше, чем цена 4-х порций. Значит, цена за 4 порции на 30+40=70 рублей дороже цены 3-х порций. Тогда одна порция мороженого стоит 70 рублей.

Ответ: 70

Вариант 5 задания №1

Незнайка хотел купить четыре порции мороженого, но ему не хватило 25 рублей. Тогда он купил три порции мороженого, и у него осталось 35 рублей. Сколько стоит порция мороженого?

Решение:

Из условия знаем, что у Незнайки на 35 рублей больше, чем цена 3-х порций. Но на 25 рублей меньше, чем цена 4-х порций. Значит, цена за 4 порции на 35+25=60 рублей дороже цены 3-х порций. Тогда одна порция мороженого стоит 60 рублей.

Ответ: 60

Задание №2 из 6 (4 кл). Лето пролетело

Вариант 1 задания №2

Средний день первой половины сентября – среда. Каким днем недели будет средний день второй половины сентября?

Решение:

Для начала вспомним, что в сентябре 30 дней. Первая половина сентября – это числа с 1-го по 15-ое. Вторая половина – числа с 16-го по 30-ое. Тогда середина первой половины – 8-е число, середина второй – 23-ее число. От 8-го до 23-го числа будет 23-8 = 15 смен дней недели. Это полные 2 недели (14 дней) и ещё сдвиг на 1 день. Из условия известно, что 8-е число – среда. Тогда после сдвига на 1 день будет четверг.

Ответ: четверг

Вариант 2 задания №2

Средний день первой половины сентября – четверг. Каким днем недели будет средний день второй половины сентября?

Решение:

Для начала вспомним, что в сентябре 30 дней. Первая половина сентября – это числа с 1-го по 15-ое. Вторая половина – числа с 16-го по 30-ое. Тогда середина первой половины – 8-е число, середина второй – 23-ее число. От 8-го до 23-го числа будет 23-8 = 15 смен дней недели. Это полные 2 недели (14 дней) и ещё сдвиг на 1 день. Из условия известно, что 8-е число – четверг. Тогда после сдвига на 1 день будет пятница.

Ответ: пятница

Вариант 3 задания №2

Средний день первой половины сентября – пятница. Каким днем недели будет средний день второй половины сентября?

Решение:

Для начала вспомним, что в сентябре 30 дней. Первая половина сентября – это числа с 1-го по 15-е. Вторая половина – числа с 16-го по 30-ое. Тогда середина первой половины – 8-е число, середина второй – 23-ее число. От 8-го до 23-го числа будет 23-8 = 15 смен дней недели. Это полные 2 недели (14 дней) и ещё сдвиг на 1 день. Из условия известно, что 8-е число – пятница. Тогда после сдвига на 1 день будет суббота.

Ответ: суббота

Вариант 4 задания №2

Средний день первой половины сентября – суббота. Каким днем недели будет средний день второй половины сентября?

Решение:

Для начала вспомним, что в сентябре 30 дней. Первая половина сентября – это числа с 1-го по 15-е. Вторая половина – числа с 16-го по 30-е. Тогда середина первой половины – 8-е число, середина второй – 23-ее число. От 8-го до 23-го числа будет 23-8 = 15 смен дней недели. Это полные 2 недели (14 дней) и ещё сдвиг на 1 день. Из условия известно, что 8-е число – суббота. Тогда после сдвига на 1 день будет воскресенье.

Ответ: воскресенье

Вариант 5 задания №2

Средний день первой половины сентября – понедельник. Каким днем недели будет средний день второй половины сентября?

Решение:

Для начала вспомним, что в сентябре 30 дней. Первая половина сентября – это числа с 1-го по 15-е. Вторая половина – числа с 16-го по 30-е. Тогда середина первой половины – 8-е число, середина второй – 23-ее число. От 8-го до 23-го числа будет 23-8 = 15 смен дней недели. Это полные 2 недели (14 дней) и ещё сдвиг на 1 день. Из условия известно, что 8-е число – понедельник. Тогда после сдвига на 1 день будет вторник.

Ответ: вторник

Задание №3 из 6 (4 кл). Число от попугая Кеши

Вариант 1 задания №3

В числе 437 попугай Кеша поменял местами две цифры, а потом одну цифру стер. Какое наибольшее двузначное число могло получиться?

Решение:

Две самые большие цифры – это 7 и 4. Двузначное число будет наибольшим, если наибольшую цифру поставить в разряд десятков, а вторую по величине в разряд единиц. Получим число 74. Заметим, что такое число действительно могло получиться, например так:

1) Меняем местами 7 и 4;

2) Убираем цифру 3.

Ответ: 74

Вариант 2 задания №3

В числе 327 попугай Кеша поменял местами две цифры, а потом одну цифру стер. Какое наибольшее двузначное число могло получиться?

Решение:

Две самые большие цифры – это 7 и 3. Двузначное число будет наибольшим, если наибольшую цифру поставить в разряд десятков, а вторую по величине в разряд единиц. Получим число 73. Заметим, что такое число действительно могло получиться, например так:

1) Меняем местами 7 и 3;

2) Убираем цифру 2.

Ответ: 73

Вариант 3 задания №3

В числе 657 попугай Кеша поменял местами две цифры, а потом одну цифру стер. Какое наибольшее двузначное число могло получиться?

Решение:

Две самые большие цифры – это 7 и 6. Двузначное число будет наибольшим, если наибольшую цифру поставить в разряд десятков, а вторую по величине в разряд единиц. Получим число 76. Заметим, что такое число действительно могло получиться, например так:

1) Меняем местами 7 и 6;

2) Убираем цифру 5.

Ответ: 76

Вариант 4 задания №3

В числе 547 попугай Кеша поменял местами две цифры, а потом одну цифру стер. Какое наибольшее двузначное число могло получиться?

Решение:

Две самые большие цифры – это 7 и 5. Двузначное число будет наибольшим, если наибольшую цифру поставить в разряд десятков, а вторую по величине в разряд единиц. Получим число 75. Заметим, что такое число действительно могло получиться, например так:

1) Меняем местами 7 и 5;

2) Убираем цифру 4.

Ответ: 75

Вариант 5 задания №3

В числе 329 попугай Кеша поменял местами две цифры, а потом одну цифру стер. Какое наибольшее двузначное число могло получиться?

Решение:

Две самые большие цифры – это 9 и 3. Двузначное число будет наибольшим, если наибольшую цифру поставить в разряд десятков, а вторую по величине в разряд единиц. Получим число 93. Заметим, что такое число действительно могло получиться, например так:

1) Меняем местами 9 и 3;

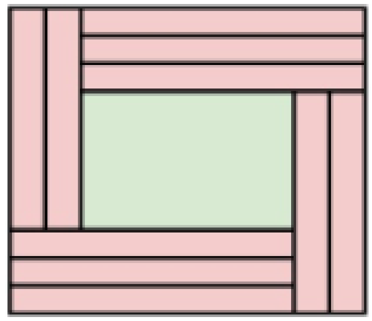
2) Убираем цифру 2.

Ответ: 93

Задание №4 из 6 (4 кл). Площадь прямоугольника

Вариант 1 задания №4

Все красные прямоугольники на картинке одинаковые, а зеленый прямоугольник имеет размеры 5×6. Чему равна площадь большого прямоугольника?



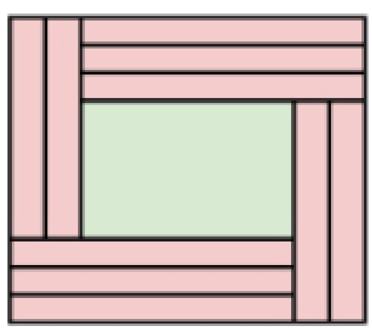
Решение:

Заметим, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. А ширина зелёного равна разности длины и утроенной ширины красного прямоугольника. Тогда разность длины и ширины зелёного прямоугольника будет равно ширине красного т.е. $6 - 5 = 1$ – ширина красного прямоугольника.
Помним, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. Тогда длина красного есть сумма длины зелёного и удвоенной ширины красного т.е. $6 + 2 \cdot 1 = 8$.
Тогда длина большого прямоугольника равна $8 + 1 + 1 + 1 = 11$. А ширина $8 + 1 + 1 = 10$. Тогда площадь равна 110.

Ответ: 110

Вариант 2 задания №4

Все красные прямоугольники на картинке одинаковые, а зеленый прямоугольник имеет размеры 6×7. Чему равна площадь большого прямоугольника?



Решение:

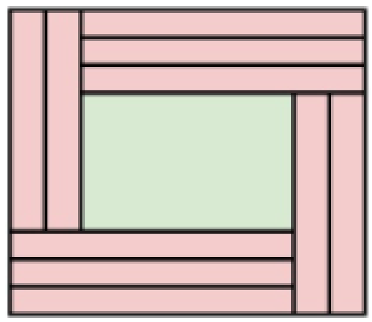
Заметим, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. А ширина зелёного равна разности длины и утроенной ширины красного прямоугольника. Тогда разность длины и ширины зелёного прямоугольника будет равно ширине красного т.е. $7 - 6 = 1$ – ширина красного прямоугольника.

Помним, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. Тогда длина красного есть сумма длины зелёного и удвоенной ширины красного т.е. $7 + 2 \cdot 1 = 9$.
Тогда длина большого прямоугольника равна $9 + 1 + 1 + 1 = 12$. А ширина $9 + 1 + 1 = 11$. Тогда площадь равна 132.

Ответ: 132

Вариант 3 задания №4

Все красные прямоугольники на картинке одинаковые, а зеленый прямоугольник имеет размеры 7×8. Чему равна площадь большого прямоугольника?



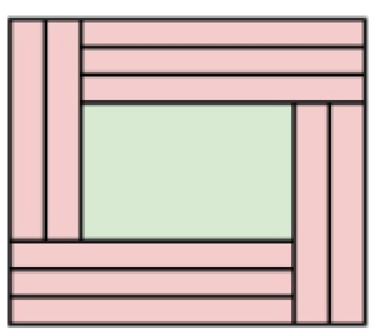
Решение:

Заметим, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. А ширина зелёного равна разности длины и утроенной ширины красного прямоугольника. Тогда разность длины и ширины зелёного прямоугольника будет равно ширине красного т.е. $8 - 7 = 1$ – ширина красного прямоугольника.
Помним, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. Тогда длина красного есть сумма длины зелёного и удвоенной ширины красного т.е. $8 + 2 \cdot 1 = 10$.
Тогда длина большого прямоугольника равна $10 + 1 + 1 + 1 = 13$. А ширина $10 + 1 + 1 = 12$. Тогда площадь равна 156.

Ответ: 156

Вариант 4 задания №4

Все красные прямоугольники на картинке одинаковые, а зеленый прямоугольник имеет размеры 8×9. Чему равна площадь большого прямоугольника?



Решение:

Заметим, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. А ширина зелёного равна разности длины и утроенной ширины красного прямоугольника. Тогда разность длины и ширины зелёного прямоугольника будет равно ширине красного т.е. $9 - 8 = 1$ – ширина красного прямоугольника.

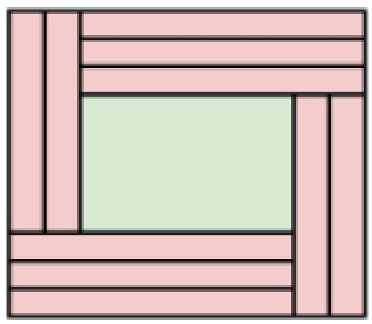
Помним, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. Тогда длина красного есть сумма длины зелёного и удвоенной ширины красного т.е. $9 + 2 \cdot 1 = 11$.

Тогда длина большого прямоугольника равна $11 + 1 + 1 + 1 = 14$. А ширина $11 + 1 + 1 = 13$. Тогда площадь равна 182.

Ответ: 182

Вариант 5 задания №4

Все красные прямоугольники на картинке одинаковые, а зеленый прямоугольник имеет размеры 11×12. Чему равна площадь большого прямоугольника?



Решение:

Заметим, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. А ширина зелёного равна разности длины и утроенной ширины красного прямоугольника. Тогда разность длины и ширины зелёного прямоугольника будет равно ширине красного т.е. $12 - 11 = 1$ – ширина красного прямоугольника.

Помним, что длина зелёного прямоугольника равна разности длины и удвоенной ширины красного прямоугольника. Тогда длина красного есть сумма длины зелёного и удвоенной ширины красного т.е. $12 + 2 \cdot 1 = 14$.

Тогда длина большого прямоугольника равна $14 + 1 + 1 + 1 = 17$. А ширина $14 + 1 + 1 = 16$. Тогда площадь равна 272.

Ответ: 272

Задание №5 из 6 (4 кл). Велосипедная гонка

Вариант 1 задания №5

Из двух диаметрально противоположных точек кругового трека стартовали (в одном направлении) два велосипедиста. Они едут с постоянными скоростями, при этом скорость у одного из велосипедистов больше, поэтому время от времени он обгоняет второго. Шестой обгон случился через 33 минуты после старта. Через сколько минут после шестого обгона случится седьмой обгон?

Решение:

Начальное расстояние между велосипедистами равно половине круга. Для удобства будем считать, что более быстрый велосипедист уезжает от более медленного со скоростью их удаления друг от друга. Будем следить за расстоянием, на которое быстрый опережает медленного.
Заметим, что в первый раз они встретятся, когда расстояние между ними будет равно одному кругу. И вообще, каждая встреча означает, что расстояние между ними увеличилось ещё на 1 круг.
Получается, что 6-ой обгон будет тогда, когда расстояние между ними станет 6 кругов. Значит, за 33 минуты быстрый «нарастил» отрыв в 5 с половиной кругов. Тогда за 66 минут быстрый «нарастил» бы 11 кругов (для удобства вычислений умножили на два) . Тогда скорость удаления равна 1 круг за 6 минут. Значит, следующая встреча будет через 6 минут.

Ответ: 6

Вариант 2 задания №5

Из двух диаметрально противоположных точек кругового трека стартовали (в одном направлении) два велосипедиста. Они едут с постоянными скоростями, при этом скорость у одного из велосипедистов больше, поэтому время от времени он обгоняет второго. Шестой обгон случился через 44 минуты после старта. Через сколько минут после шестого обгона случится седьмой обгон?

Решение:

Начальное расстояние между велосипедистами равно половине круга. Для удобства будем считать, что более быстрый велосипедист уезжает от более медленного со скоростью их удаления друг от друга. Будем следить за расстоянием, на которое быстрый опережает медленного.
Заметим, что в первый раз они встретятся, когда расстояние между ними будет равно одному кругу. И вообще, каждая встреча означает, что расстояние между ними увеличилось ещё на 1 круг.
Получается, что 6-ой обгон будет тогда, когда расстояние между ними станет 6 кругов. Значит, за 44 минуты быстрый «нарастил» отрыв в 5 с половиной кругов. Тогда за 88 минут быстрый «нарастил» бы 11 кругов (для удобства вычислений умножили на два) . Тогда скорость удаления равна 1 круг за 8 минут. Значит, следующая встреча будет через 8 минут.

Ответ: 8

Вариант 3 задания №5

Из двух диаметрально противоположных точек кругового трека стартовали (в одном направлении) два велосипедиста. Они едут с постоянными скоростями, при этом скорость у одного из велосипедистов больше, поэтому время от времени он обгоняет второго. Шестой обгон случился через 55 минут после старта. Через сколько минут после шестого обгона случится седьмой обгон?

Решение:

Начальное расстояние между велосипедистами равно половине круга. Для удобства будем считать, что более быстрый велосипедист уезжает от более медленного со скоростью их удаления друг от друга. Будем следить за расстоянием, на которое быстрый опережает медленного.
Заметим, что в первый раз они встретятся, когда расстояние между ними будет равно одному кругу. И вообще, каждая встреча означает, что расстояние между ними увеличилось ещё на 1 круг.
Получается, что 6-ой обгон будет тогда, когда расстояние между ними станет 6 кругов. Значит, за 55 минут быстрый «нарастил» отрыв в 5 с половиной кругов. Тогда за 110 минут быстрый «нарастил» бы 11 кругов (для удобства вычислений умножили на два) . Тогда скорость удаления равна 1 круг за 10 минут. Значит, следующая встреча будет через 10 минут.

Ответ: 10

Вариант 4 задания №5

Из двух диаметрально противоположных точек кругового трека стартовали (в одном направлении) два велосипедиста. Они едут с постоянными скоростями, при этом скорость у одного из велосипедистов больше, поэтому время от времени он обгоняет второго. Шестой обгон случился через 1 час 6 минут после старта. Через сколько минут после шестого обгона случится седьмой обгон?

Решение:

Начальное расстояние между велосипедистами равно половине круга. Для удобства будем считать, что более быстрый велосипедист уезжает от более медленного со скоростью их удаления друг от друга. Будем следить за расстоянием, на которое быстрый опережает медленного.
Заметим, что в первый раз они встретятся, когда расстояние между ними будет равно одному кругу. И вообще, каждая встреча означает, что расстояние между ними увеличилось ещё на 1 круг.
Получается, что 6-ой обгон будет тогда, когда расстояние между ними станет 6 кругов. Значит за 66 минут быстрый «нарастил» отрыв в 5 с половиной кругов. Тогда за 132 минуты быстрый «нарастил» бы 11 кругов (для удобства вычислений умножили на два) . Тогда скорость удаления равна 1 круг за 12 минут. Значит, следующая встреча будет через 12 минут.

Ответ: 12

Вариант 5 задания №5

Из двух диаметрально противоположных точек кругового трека стартовали (в одном направлении) два велосипедиста. Они едут с постоянными скоростями, при этом скорость у одного из велосипедистов больше, поэтому время от времени он обгоняет второго. Шестой обгон случился через 1 час 17 минут после старта. Через сколько минут после шестого обгона случится седьмой обгон?

Решение:

Начальное расстояние между велосипедистами равно половине круга. Для удобства будем считать, что более быстрый велосипедист уезжает от более медленного со скоростью их удаления друг от друга. Будем следить за расстоянием, на которое быстрый опережает медленного.
Заметим, что в первый раз они встретятся, когда расстояние между ними будет равно одному кругу. И вообще, каждая встреча означает, что расстояние между ними увеличилось ещё на 1 круг.
Получается, что 6-ой обгон будет тогда, когда расстояние между ними станет 6 кругов. Значит за 77 минут быстрый «нарастил» отрыв в 5 с половиной кругов. Тогда за 154 минуты быстрый «нарастил» бы 11 кругов (для удобства вычислений умножили на два) . Тогда скорость удаления равна 1 круг за 14 минут. Значит, следующая встреча будет через 14 минут.

Ответ: 14

Задание №6 из 6 (4 кл). Рыцари и лжецы

Вариант 1 задания №6

За круглым столом сидят 100 человек: каждый из них рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врет. Каждый сказал: «Про двух моих соседей ничего говорить не буду, а вот все остальные здесь – лжецы» Сколько рыцарей за этим столом?

Решение:

Заметим, что все лжецами быть не могут т.к. тогда каждый из них сказал бы правду про остальных. Значит, есть хотя бы 1 рыцарь.
Рассмотрим этого рыцаря, он говорит правду, значит, все кроме его соседей лжецы.
Рассмотрим соседей этого рыцаря. Заметим, что они не могут быть одновременно рыцарями т.к. тогда каждый из них соврёт про другого. Также оба соседа не могут быть лжецами т.к. тогда каждый из них скажет правду.
Получаем, что среди соседей может быть только 1 рыцарь и 1 лжец. Остаётся заметить, что в таком случае всё сходится – рыцари говорят правду, а лжецы – лгут.

Ответ: 2

Вариант 2 задания №6

За круглым столом сидят 200 человек: каждый из них рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врет. Каждый сказал: «Про двух моих соседей ничего говорить не буду, а вот все остальные здесь – лжецы» Сколько рыцарей за этим столом?

Решение:

Заметим, что все лжецами быть не могут т.к. тогда каждый из них сказал бы правду про остальных. Значит, есть хотя бы 1 рыцарь.
Рассмотрим этого рыцаря, он говорит правду, значит, все кроме его соседей лжецы.
Рассмотрим соседей этого рыцаря. Заметим, что они не могут быть одновременно рыцарями т.к. тогда каждый из них соврёт про другого. Также оба соседа не могут быть лжецами т.к. тогда каждый из них скажет правду.
Получаем, что среди соседей может быть только 1 рыцарь и 1 лжец. Остаётся заметить, что в таком случае всё сходится – рыцари говорят правду, а лжецы – лгут.

Ответ: 2

Вариант 3 задания №6

За круглым столом сидят 300 человек: каждый из них рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врет. Каждый сказал: «Про двух моих соседей ничего говорить не буду, а вот все остальные здесь – лжецы» Сколько рыцарей за этим столом?

Решение:

Заметим, что все лжецами быть не могут т.к. тогда каждый из них сказал бы правду про остальных. Значит, есть хотя бы 1 рыцарь.
Рассмотрим этого рыцаря, он говорит правду, значит, все кроме его соседей лжецы.

Рассмотрим соседей этого рыцаря. Заметим, что они не могут быть одновременно рыцарями т.к. тогда каждый из них соврёт про другого. Также оба соседа не могут быть лжецами т.к. тогда каждый из них скажет правду.
Получаем, что среди соседей может быть только 1 рыцарь и 1 лжец. Остаётся заметить, что в таком случае всё сходится – рыцари говорят правду, а лжецы – лгут.

Ответ: 2

Вариант 4 задания №6

За круглым столом сидят 400 человек: каждый из них рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врет. Каждый сказал: «Про двух моих соседей ничего говорить не буду, а вот все остальные здесь – лжецы» Сколько рыцарей за этим столом?

Решение:

Заметим, что все лжецами быть не могут т.к. тогда каждый из них сказал бы правду про остальных. Значит, есть хотя бы 1 рыцарь.
Рассмотрим этого рыцаря, он говорит правду, значит, все кроме его соседей лжецы.
Рассмотрим соседей этого рыцаря. Заметим, что они не могут быть одновременно рыцарями т.к. тогда каждый из них соврёт про другого. Также оба соседа не могут быть лжецами т.к. тогда каждый из них скажет правду.
Получаем, что среди соседей может быть только 1 рыцарь и 1 лжец. Остаётся заметить, что в таком случае всё сходится – рыцари говорят правду, а лжецы – лгут.

Ответ: 2

Вариант 5 задания №6

За круглым столом сидят 500 человек: каждый из них рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врет. Каждый сказал: «Про двух моих соседей ничего говорить не буду, а вот все остальные здесь – лжецы» Сколько рыцарей за этим столом?

Решение:

Заметим, что все лжецами быть не могут т.к. тогда каждый из них сказал бы правду про остальных. Значит, есть хотя бы 1 рыцарь.
Рассмотрим этого рыцаря, он говорит правду, значит, все кроме его соседей лжецы.
Рассмотрим соседей этого рыцаря. Заметим, что они не могут быть одновременно рыцарями т.к. тогда каждый из них соврёт про другого. Также оба соседа не могут быть лжецами т.к. тогда каждый из них скажет правду.
Получаем, что среди соседей может быть только 1 рыцарь и 1 лжец. Остаётся заметить, что в таком случае всё сходится – рыцари говорят правду, а лжецы – лгут.

Ответ: 2

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

5 класс

6 заданий по 5 баллов

(максимум 30 баллов)

продолжительность 60 минут

Задание №1 из 6 (5 кл). Наибольшее наибольшее

Вариант 1 задания №1

Сумма пяти различных натуральных (то есть целых положительных) чисел равна 100. Какое наибольшее значение может принимать самое больше из этих чисел?

Решение:

Заметим, что наименьшая сумма четырех натуральных различных чисел это $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Поэтому наибольшее значение наибольшего числа — это $100 - 10 = 90$

Ответ: 90

Вариант 2 задания №1

Сумма пяти различных натуральных (то есть целых положительных) чисел равна 200. Какое наибольшее значение может принимать самое больше из этих чисел?

Решение:

Заметим, что наименьшая сумма четырех натуральных различных чисел это $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Поэтому наибольшее значение наибольшего числа — это $200 - 10 = 190$

Ответ: 190

Вариант 3 задания №1

Сумма пяти различных натуральных (то есть целых положительных) чисел равна 300. Какое наибольшее значение может принимать самое больше из этих чисел?

Решение:

Заметим, что наименьшая сумма четырех натуральных различных чисел это $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Поэтому наибольшее значение наибольшего числа — это $300 - 10 = 290$

Ответ: 290

Вариант 4 задания №1

Сумма пяти различных натуральных (то есть целых положительных) чисел равна 400. Какое наибольшее значение может принимать самое больше из этих чисел?

Решение:

Заметим, что наименьшая сумма четырех натуральных различных чисел это $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Поэтому наибольшее значение наибольшего числа — это $400 - 10 = 390$

Ответ: 390

Вариант 5 задания №1

Сумма пяти различных натуральных (то есть целых положительных) чисел равна 500. Какое наибольшее значение может принимать самое больше из этих чисел?

Решение:

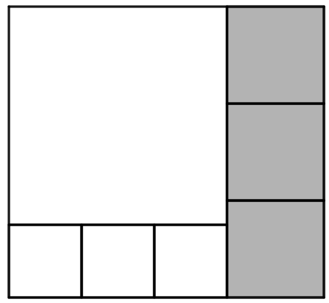
Заметим, что наименьшая сумма четырех натуральных различных чисел это $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Поэтому наибольшее значение наибольшего числа — это $500 - 10 = 490$

Ответ: 490

Задание №2 из 6 (5 кл). 7 квадратов

Вариант 1 задания №2

Прямоугольник на рисунке составлен из 7 квадратов. Сторона каждого закрашенного квадрата равна 4см. Чему равна сторона большого белого квадрата?



Решение:

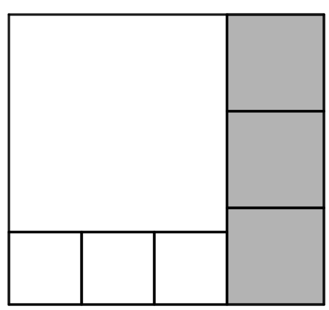
Обозначим сторону маленького белого квадрата через x. Выразим сторону большого белого квадрата двумя способами.

Горизонтальная сторона равна, как легко видеть, $3x$, а вертикальная сторона выражается как $3 \cdot 4 - x$. Отсюда мы получаем равенство $12 - x = 3x$. Тогда $4x = 12$ и $x = 3$. Таким образом, сторона маленького белого квадрата равна 3, а сторона большого белого квадрата (она в три раза больше) равна 9.

Ответ: 9

Вариант 2 задания №2

Прямоугольник на рисунке составлен из 7 квадратов. Сторона каждого закрашенного квадрата равна 8см. Чему равна сторона большого белого квадрата?



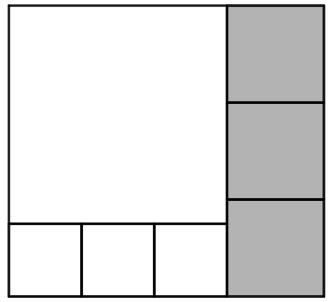
Решение:

Сторона большого белого квадрата равна трём сторонам маленьких белых квадратиков. А вертикальная сторона большого прямоугольника (рамка нашей картинки) равна сумме сторон большого и маленького белого квадрата, т.е. равна 4-м сторонам маленького квадратика. С другой стороны, вертикальная сторона большого прямоугольника это три стороны закрашенного квадрата, т.е. $3 \cdot 8 = 24$см. Тогда сторона маленького белого квадрата равна $24 : 4 = 6$см. А сторона большого белого равна $6 \cdot 3 = 18$см.

Ответ: 18

Вариант 3 задания №2

Прямоугольник на рисунке составлен из 7 квадратов. Сторона каждого закрашенного квадрата равна 12см. Чему равна сторона большого белого квадрата?



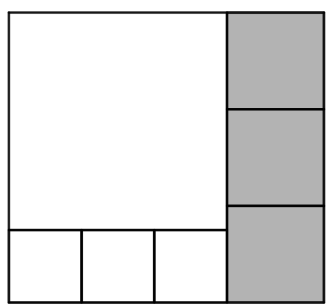
Решение:

Сторона большого белого квадрата равна трём сторонам маленьких белых квадратиков. А вертикальная сторона большого прямоугольника (рамка нашей картинки) равна сумме сторон большого и маленького белого квадрата, т.е. равна 4-м сторонам маленького квадратика. С другой стороны, вертикальная сторона большого прямоугольника это три стороны закрашенного квадрата, т.е. $3 \cdot 12 = 36$см. Тогда сторона маленького белого квадрата равна $36 : 4 = 9$см. А сторона большого белого равна $9 \cdot 3 = 27$см.

Ответ: 27

Вариант 4 задания №2

Прямоугольник на рисунке составлен из 7 квадратов. Сторона каждого закрашенного квадрата равна 16см. Чему равна сторона большого белого квадрата?



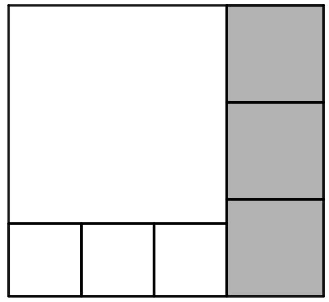
Решение:

Сторона большого белого квадрата равна трём сторонам маленьких белых квадратиков. А вертикальная сторона большого прямоугольника (рамка нашей картинки) равна сумме сторон большого и маленького белого квадрата, т.е. равна 4-м сторонам маленького квадратика. С другой стороны, вертикальная сторона большого прямоугольника это три стороны закрашенного квадрата, т.е. $3 \cdot 16 = 48$см. Тогда сторона маленького белого квадрата равна $48 : 4 = 12$см. А сторона большого белого равна $12 \cdot 3 = 36$см.

Ответ: 36

Вариант 5 задания №2

Прямоугольник на рисунке составлен из 7 квадратов. Сторона каждого закрашенного квадрата равна 20см. Чему равна сторона большого белого квадрата?



Решение:

Сторона большого белого квадрата равна трём сторонам маленьких белых квадратиков. А вертикальная сторона большого прямоугольника (рамка нашей картинки) равна сумме сторон большого и маленького белого квадрата, т.е. равна 4-м сторонам маленького квадратика. С другой стороны, вертикальная сторона большого прямоугольника это три стороны закрашенного квадрата, т.е. $3 \cdot 20 = 60$см. Тогда сторона маленького белого квадрата равна $60 : 4 = 15$см. А сторона большого белого равна $15 \cdot 3 = 45$см.

Ответ: 45

Задание №3 из 6 (5 кл). Незнайка и мороженое

Вариант 1 задания №3

Незнайка хотел купить пять порций мороженого, но ему не хватило 80 рублей. Тогда он купил две порции мороженого, и у него осталось 70 рублей. Сколько денег было у Незнайки изначально?

Решение:

Сначала Незнайка хотел купить 5 порций мороженого, но ему не хватило 80 рублей. Тогда он умерил свои запросы, и решил купить **на три** порции меньше. Теперь у него остается еще 70 рублей. Получается, что сумма, которой располагает Незнайка, на 70 рублей больше стоимости двух порций мороженого, и на 80 меньше стоимости пяти порций. То есть, 70+80=150 рублей, — это стоимость трех порций мороженого. Одна порция, значит, стоит 50 рублей, а денег у Незнайки изначально было $50 \cdot 2 + 70 = 170$ рублей.

Ответ: 170 рублей

Вариант 2 задания №3

Незнайка хотел купить пять порций мороженого, но ему не хватило 70 рублей. Тогда он купил две порции мороженого, и у него осталось 80 рублей. Сколько денег было у Незнайки изначально?

Решение:

Сначала Незнайка хотел купить 5 порций мороженого, но ему не хватило 70 рублей. Тогда он умерил свои запросы, и решил купить **на три** порции меньше. Теперь у него остается еще 80 рублей. Получается, что сумма, которой располагает Незнайка, на 80 рублей больше стоимости двух порций мороженого, и на 70 меньше стоимости пяти порций. То есть, 80+70=150 рублей, — это стоимость трех порций мороженого. Одна порция, значит, стоит 50 рублей, а денег у Незнайки изначально было $50 \cdot 2 + 80 = 180$ рублей.

Ответ: 180 рублей

Вариант 3 задания №3

Незнайка хотел купить пять порций мороженого, но ему не хватило 65 рублей. Тогда он купил две порции мороженого, и у него осталось 85 рублей. Сколько денег было у Незнайки изначально?

Решение:

Сначала Незнайка хотел купить 5 порций мороженого, но ему не хватило 65 рублей. Тогда он умерил свои запросы, и решил купить **на три** порции меньше. Теперь у него остается еще 85 рублей. Получается, что сумма, которой располагает Незнайка, на 85 рублей больше стоимости двух порций мороженого, и на 65 меньше стоимости пяти порций. То есть, 85+65=150 рублей, — это стоимость трех порций мороженого. Одна порция, значит, стоит 50 рублей, а денег у Незнайки изначально было $50 \cdot 2 + 85 = 185$ рублей.

Ответ: 185 рублей

Вариант 4 задания №3

Незнайка хотел купить пять порций мороженого, но ему не хватило 85 рублей. Тогда он купил две порции мороженого, и у него осталось 65 рублей. Сколько денег было у Незнайки изначально?

Решение:

Сначала Незнайка хотел купить 5 порций мороженого, но ему не хватило 85 рублей. Тогда он умерил свои запросы, и решил купить **на три** порции меньше. Теперь у него остается еще 65 рублей. Получается, что сумма, которой располагает Незнайка, на 65 рублей больше стоимости двух порций мороженого, и на 85 меньше стоимости пяти порций. То есть, 65+85=150 рублей, — это стоимость трех порций мороженого. Одна порция, значит, стоит 50 рублей, а денег у Незнайки изначально было $50 \cdot 2 + 65 = 165$ рублей.

Ответ: 165 рублей

Вариант 5 задания №3

Незнайка хотел купить пять порций мороженого, но ему не хватило 60 рублей. Тогда он купил две порции мороженого, и у него осталось 90 рублей. Сколько денег было у Незнайки изначально?

Решение:

Сначала Незнайка хотел купить 5 порций мороженого, но ему не хватило 60 рублей. Тогда он умерил свои запросы, и решил купить **на три** порции меньше. Теперь у него остается еще 90 рублей. Получается, что сумма, которой располагает Незнайка, на 90 рублей больше стоимости двух порций мороженого, и на 60 меньше стоимости пяти порций. То есть, 90+60=150 рублей, — это стоимость трех порций мороженого. Одна порция, значит, стоит 50 рублей, а денег у Незнайки изначально было $50 \cdot 2 + 90 = 190$ рублей.

Ответ: 190 рублей

Задание №4 из 6 (5 кл). Пять последовательных цифр

Вариант 1 задания №4

На доске выписаны в порядке возрастания все пятизначные числа, в записи которых используются пять последовательных цифр. Какое число идет после 59876?

Решение:

Мы видим, что из описанных чисел, данное нам число (59876) — это наибольшее из таких чисел, которое может начинаться на 5. Следовательно, нам нужно теперь искать число нужного вида, при этом начинающееся на 6. А из начинающихся на 6 нам нужно наименьшее число подходящего вида. Поэтому мы берем цифры, меньшие шести, образующие с ним последовательные пять цифр, — это 2, 3, 4, 5, и из цифр 2, 3, 4, 5, 6 составляем наименьшее число, первая цифра которого — 6. Это и получается число 62345.

Ответ: 62345

Вариант 2 задания №4

На доске выписаны в порядке возрастания все пятизначные числа, в записи которых используются пять последовательных цифр. Какое число идет после 48765?

Решение:

Мы видим, что из описанных чисел, данное нам число (48765) — это наибольшее из таких чисел, которое может начинаться на 4. Следовательно, нам нужно теперь искать число нужного вида, при этом начинающееся на 5. А из начинающихся на 5 нам нужно наименьшее число подходящего вида. Поэтому мы берем цифры, меньшие шести, образующие с ним последовательные пять цифр, — это 1, 2, 3, 4, и из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляем наименьшее число, первая цифра которого — 5. Это и получается число 51234.

Ответ: 51234

Вариант 3 задания №4

На доске выписаны в порядке возрастания все пятизначные числа, в записи которых используются пять последовательных цифр. Какое число идет после 37654?

Решение:

Мы видим, что из описанных чисел, данное нам число (37654) — это наибольшее из таких чисел, которое может начинаться на 3. Следовательно, нам нужно теперь искать число нужного вида, при этом начинающееся на 4. А из начинающихся на 4 нам нужно наименьшее число подходящего вида. Поэтому мы берем цифры, меньшие шести, образующие с ним последовательные пять цифр, — это 0, 1, 2, 3, и из цифр 0, 1, 2, 3, 4 составляем наименьшее число, первая цифра которого — 4. Это и получается число 40123.

Ответ: 40123

Вариант 4 задания №4

На доске выписаны в порядке возрастания все пятизначные числа, в записи которых используются пять последовательных цифр. Какое число идет после 69875?

Решение:

Мы видим, что из описанных чисел, данное нам число (69875) — это наибольшее из таких чисел, которое может начинаться на 7. Следовательно, нам нужно теперь искать число нужного вида, при этом начинающееся на 7. А из начинающихся на 7 нам нужно наименьшее число подходящего вида. Поэтому мы берем цифры, меньшие шести, образующие с ним последовательные пять цифр, — это 3, 4, 5, 6, и из цифр 3, 4, 5, 6, 7 составляем наименьшее число, первая цифра которого — 7. Это и получается число 73456.

Ответ: 73456

Вариант 5 задания №4

На доске выписаны в порядке возрастания все пятизначные числа, в записи которых используются пять последовательных цифр. Какое число идет после 79865?

Решение:

Мы видим, что из описанных чисел, данное нам число (79865) — это наибольшее из таких чисел, которое может начинаться на 8. Следовательно, нам нужно теперь искать число нужного вида, при этом начинающееся на 8. А из начинающихся на 8 нам нужно наименьшее число подходящего вида. Поэтому мы берем цифры, меньшие шести, образующие с ним последовательные пять цифр, — это 4, 5, 6, 7, и из цифр 4, 5, 6, 7, 8 составляем наименьшее число, первая цифра которого — 8. Это и получается число 84567.

Ответ: 84567

Задание №5 из 6 (5 кл). Разрезание прямоугольника

Вариант 1 задания №5

На листке клетчатой бумаги Карлсон нарисовал прямоугольник 3×4. Малыш провел на листе бумаги прямую. Какое наибольшее число маленьких квадратиков могут оказаться разрезанными на две части? (Если прямая проходит через вершину квадрата, то считается, что она не разрезала его на две части.)

Решение:

Заметим, что всякий раз, когда прямая «переходит» из одного маленького квадратика в другой, она пересекает внутреннюю горизонтальную или вертикальную линию. Всего в прямоугольнике 3×4 таких (внутренних) линий пять – две горизонтальных и три вертикальных. То есть всего может быть пять переходов в новый квадратик. И еще был один, первый вход прямой в наш прямоугольник. Итого получится разрезать максимум шесть квадратиков. Легко понять, что диагональ прямоугольника разрезает как раз шесть квадратиков.

Ответ: 6

Вариант 2 задания №5

На листке клетчатой бумаги Карлсон нарисовал прямоугольник 4×5. Малыш провел на листе бумаги прямую. Какое наибольшее число маленьких квадратиков могут оказаться разрезанными на две части? (Если прямая проходит через вершину квадрата, то считается, что она не разрезала его на две части.)

Решение:

Заметим, что всякий раз, когда прямая «переходит» из одного маленького квадратика в другой, она пересекает внутреннюю горизонтальную или вертикальную линию. Всего в прямоугольнике 4×5 таких (внутренних) линий семь – три горизонтальных и четыре вертикальных. То есть всего может быть 7 переходов в новый квадратик. И еще был один, первый вход прямой в наш прямоугольник. Итого получится разрезать максимум 8 квадратиков. Легко понять, что диагональ прямоугольника разрезает как раз 8 квадратиков.

Ответ: 8

Вариант 3 задания №5

На листке клетчатой бумаги Карлсон нарисовал прямоугольник 3×5. Малыш провел на листе бумаги прямую. Какое наибольшее число маленьких квадратиков могут оказаться разрезанными на две части? (Если прямая проходит через вершину квадрата, то считается, что она не разрезала его на две части.)

Решение:

Заметим, что всякий раз, когда прямая «переходит» из одного маленького квадратика в другой, она пересекает внутреннюю горизонтальную или вертикальную линию. Всего в прямоугольнике 3×5 таких (внутренних) линий шесть – две горизонтальных и четыре вертикальных. То есть всего может быть 6 переходов в новый квадратик. И еще был один, первый вход прямой в наш прямоугольник.

Итого получится разрезать максимум 7 квадратиков. Легко понять, что диагональ прямоугольника разрезает как раз 7 квадратиков.

Ответ: 7

Вариант 4 задания №5

На листке клетчатой бумаги Карлсон нарисовал прямоугольник 5×6. Малыш провел на листе бумаги прямую. Какое наибольшее число маленьких квадратиков могут оказаться разрезанными на две части? (Если прямая проходит через вершину квадрата, то считается, что она не разрезала его на две части.)

Решение:

Заметим, что всякий раз, когда прямая «переходит» из одного маленького квадратика в другой, она пересекает внутреннюю горизонтальную или вертикальную линию. Всего в прямоугольнике 5×6 таких (внутренних) линий девять – четыре горизонтальных и пять вертикальных. То есть всего может быть 9 переходов в новый квадратик. И еще был один, первый вход прямой в наш прямоугольник. Итого получится разрезать максимум 10 квадратиков. Легко понять, что диагональ прямоугольника разрезает как раз 10 квадратиков.

Ответ: 10

Вариант 5 задания №5

На листке клетчатой бумаги Карлсон нарисовал прямоугольник 4×7. Малыш провел на листе бумаги прямую. Какое наибольшее число маленьких квадратиков могут оказаться разрезанными на две части? (Если прямая проходит через вершину квадрата, то считается, что она не разрезала его на две части.)

Решение:

Заметим, что всякий раз, когда прямая «переходит» из одного маленького квадратика в другой, она пересекает внутреннюю горизонтальную или вертикальную линию. Всего в прямоугольнике 4×7 таких (внутренних) линий девять – три горизонтальных и шесть вертикальных. То есть всего может быть 9 переходов в новый квадратик. И еще был один, первый вход прямой в наш прямоугольник. Итого получится разрезать максимум 10 квадратиков. Легко понять, что диагональ прямоугольника разрезает как раз 10 квадратиков.

Ответ: 10

Задание №6 из 6 (5 кл). Трое ели торт

Вариант 1 задания №6

Малыш, Карлсон и Винни-Пух съели торт. Они ели одновременно и каждый ел торт с одной и той же скоростью. Малышу досталась только $\frac{1}{13}$ часть торта. А вот если бы Малыш ел только с Карлсоном, то ему бы досталась четверть торта. Какую долю торта съел бы Малыш, если бы он ел только с Винни-Пухом? (В ответе введите такое число N, что Малышу достанется $\frac{1}{N}$ часть торта)

Решение:

Малыш съел 1/13 долю торта, а значит Карлсон и Винни-Пух получили 12 таких долей. Значит по скорости поедания торта Карлсон и Винни-Пух равны вместе 12 Малышам. Когда Малыш ест только с Карлсоном, он получает четверть торта, а Карлсон, следовательно, три четверти. Поэтому один Карлсон, как едок торта, равен трем Малышам. Отсюда мы получаем, что Винни-Пух равен $12 - 3 = 9$ Малышам. Значит, когда Малыш будет есть вместе с Пухом, он получит торта в 9 раз меньше, чем Пух, и это будет 1/10 доля.

Ответ: 10

Вариант 2 задания №6

Малыш, Карлсон и Винни-пух съели торт. Они ели одновременно и каждый ел торт с одной и той же скоростью. Малышу досталась только $\frac{1}{9}$ часть торта. А вот если бы Малыш ел только с Карлсоном, то ему бы досталась четверть торта. Какую долю торта съел бы Малыш, если бы он ел только с Винни-Пухом? (В ответе введите такое число N, что Малышу достанется $\frac{1}{N}$ часть торта)

Решение:

Малыш съел 1/9 долю торта, а значит Карлсон и Винни-Пух получили 8 таких долей. Значит по скорости поедания торта Карлсон и Винни-Пух равны вместе 8 Малышам. Когда Малыш ест только с Карлсоном, он получает четверть торта, а Карлсон, следовательно, три четверти. Поэтому один Карлсон, как едок торта, равен трем Малышам. Отсюда мы получаем, что Винни-Пух равен $8-3 = 5$ Малышам. Значит, когда Малыш будет есть вместе с Пухом, он получит торта в 5 раз меньше, чем Пух, и это будет 1/6 доля.

Ответ: 6

Вариант 3 задания №6

Малыш, Карлсон и Винни-пух съели торт. Они ели одновременно и каждый ел торт с одной и той же скоростью. Малышу досталась только $\frac{1}{10}$ часть торта. А вот если бы Малыш ел только с Карлсоном, то ему бы досталась четверть торта. Какую долю торта съел бы Малыш, если бы он ел только с Винни-Пухом? (В ответе введите такое число N, что Малышу достанется $\frac{1}{N}$ часть торта)

Решение:

Малыш съел 1/10 долю торта, а значит Карлсон и Винни-Пух получили 9 таких долей. Значит по скорости поедания торта Карлсон и Винни-Пух равны вместе 9 Малышам. Когда Малыш ест только с Карлсоном, он получает четверть торта, а Карлсон, следовательно, три четверти. Поэтому один Карлсон, как едок торта, равен трем Малышам. Отсюда мы получаем, что Винни-Пух равен

$9 - 3 = 6$ Малышам. Значит, когда Малыш будет есть вместе с Пухом, он получит торта в 6 раз меньше, чем Пух, и это будет 1/7 доля.

Ответ: 7

Вариант 4 задания №6

Малыш, Карлсон и Винни-пух съели торт. Они ели одновременно и каждый ел торт с одной и той же скоростью. Малышу досталась только $\frac{1}{11}$ часть торта. А вот если бы Малыш ел только с Карлсоном, то ему бы досталась четверть торта. Какую долю торта съел бы Малыш, если бы он ел только с Винни-Пухом? (В ответе введите такое число N, что Малышу достанется $\frac{1}{N}$ часть торта)

Решение:

Малыш съел 1/11 долю торта, а значит Карлсон и Винни-Пух получили 10 таких долей. Значит по скорости поедания торта Карлсон и Винни-Пух равны вместе 10 Малышам. Когда Малыш ест только с Карлсоном, он получает четверть торта, а Карлсон, следовательно, три четверти. Поэтому один Карлсон, как едок торта, равен трем Малышам. Отсюда мы получаем, что Винни-Пух равен $10 - 3 = 7$ Малышам. Значит, когда Малыш будет есть вместе с Пухом, он получит торта в 7 раз меньше, чем Пух, и это будет 1/8 доля.

Ответ: 8

Вариант 5 задания №6

Малыш, Карлсон и Винни-пух съели торт. Они ели одновременно и каждый ел торт с одной и той же скоростью. Малышу досталась только $\frac{1}{12}$ часть торта. А вот если бы Малыш ел только с Карлсоном, то ему бы досталась четверть торта. Какую долю торта съел бы Малыш, если бы он ел только с Винни-Пухом? (В ответе введите такое число N, что Малышу достанется $\frac{1}{N}$ часть торта)

Решение:

Малыш съел 1/12 долю торта, а значит Карлсон и Винни-Пух получили 11 таких долей. Значит по скорости поедания торта Карлсон и Винни-Пух равны вместе 11 Малышам. Когда Малыш ест только с Карлсоном, он получает четверть торта, а Карлсон, следовательно, три четверти. Поэтому один Карлсон, как едок торта, равен трем Малышам. Отсюда мы получаем, что Винни-Пух равен $11 - 3 = 8$ Малышам. Значит, когда Малыш будет есть вместе с Пухом, он получит торта в 8 раз меньше, чем Пух, и это будет 1/9 доля.

Ответ: 9

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

6 класс

6 заданий по 5 баллов

(максимум 30 баллов)

продолжительность 60 минут

Задание №1 из 6 (6 кл). Разрезание веревки

Вариант 1 задания №1

У Пети есть веревка длиной 30 метров. Он разрезает ее пополам, затем один кусок выкидывает, а второй режет пополам, и так далее. Сколько разрезов сделает Петя, если в итоге хочет получить кусок веревки не длиннее 20 см и не короче 10 см?

Решение:

Заметим, что после каждого разрезания длина веревки уменьшается в 2 раза. После первого раза веревка станет длиной 15 метров, после второго – 7,5 метра, после третьего – 3,75 метра, после четвертого – 1,875 метра, после пятого - 93,75 сантиметра, после шестого – 46,875 сантиметра, после седьмого – 23,4375 сантиметра, после восьмого разрезания получится веревка длиной 11,71875 сантиметра, что удовлетворяет параметрам от 10 до 20 сантиметров.

Ответ: 8 раз

Вариант 2 задания №1

У Пети есть веревка длиной 20 метров. Он разрезает ее пополам, затем один кусок выкидывает, а второй режет пополам, и так далее. Сколько разрезов сделает Петя, если в итоге хочет получить кусок веревки не длиннее 20 см и не короче 10 см?

Решение:

Заметим, что после каждого разрезания длина веревки уменьшается в 2 раза. После первого раза веревка станет длиной 10 метров, после второго – 5 метров, после третьего – 2,5 метра, после четвертого – 1,25 метра, после пятого - 62,5 сантиметра, после шестого – 31,25 сантиметра, после седьмого – 15,625 сантиметра, что удовлетворяет параметрам от 10 до 20 сантиметров.

Ответ: 7 раз

Вариант 3 задания №1

У Пети есть веревка длиной 60 метров. Он разрезает ее пополам, затем один кусок выкидывает, а второй режет пополам, и так далее. Сколько разрезов сделает Петя, если в итоге хочет получить кусок веревки не длиннее 20 см и не короче 10 см?

Решение:

Заметим, что после каждого разрезания длина веревки уменьшается в 2 раза. После первого раза веревка станет длиной 30 метров, после второго – 15 метров, после третьего – 7,5 метра, после четвертого – 3,75 метра, после пятого - 1,875 метра, после шестого – 93,75 сантиметра, после седьмого – 46,875 сантиметра, после восьмого — 23,4375 сантиметра, после девятого разрезания получится веревка длиной 11,71875 сантиметра, что удовлетворяет параметрам от 10 до 20 сантиметров.

Ответ: 9 раз

Вариант 4 задания №1

У Пети есть веревка длиной 60 метров. Он разрезает ее пополам, затем один кусок выкидывает, а второй режет пополам, и так далее. Сколько разрезов сделает Петя, если в итоге хочет получить кусок веревки не длиннее 25 см и не короче 20 см?

Решение:

Заметим, что после каждого разрезания длина веревки уменьшается в 2 раза. После первого раза веревка станет длиной 30 метров, после второго – 15 метров, после третьего – 7,5 метра, после четвертого – 3,75 метра, после пятого - 1,875 метра, после шестого – 93,75 сантиметра, после седьмого – 46,875 сантиметра, после восьмого разрезания получится веревка длиной 23,4375 сантиметра, что удовлетворяет параметрам от 20 до 25 сантиметров.

Ответ: 8 раз

Вариант 5 задания №1

У Пети есть веревка длиной 40 метров. Он разрезает ее пополам, затем один кусок выкидывает, а второй режет пополам, и так далее. Сколько разрезов сделает Петя, если в итоге хочет получить кусок веревки не длиннее 40 см и не короче 25 см?

Решение:

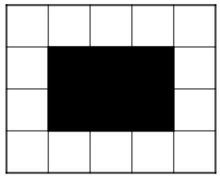
Заметим, что после каждого разрезания длина веревки уменьшается в 2 раза. После первого раза веревка станет длиной 20 метров, после второго – 10 метров, после третьего – 5 метров, после четвертого – 2,5 метра, после пятого – 1,25 сантиметра, после шестого – 62,5 сантиметра, после седьмого – 31,25 сантиметра, что удовлетворяет параметрам от 25 до 40 сантиметров.

Ответ: 7 раз

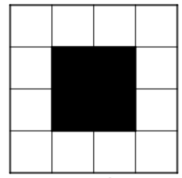
Задание №2 из 6 (6 кл). Дырявый брусок

Вариант 1 задания №2

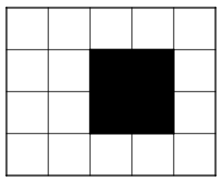
В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



вид спереди



вид сбоку



вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

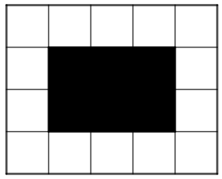
Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая «шахта» состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху.
Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой «шахтой»). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 8 кубиков.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 8 = 40$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока кубиков равен 400г.

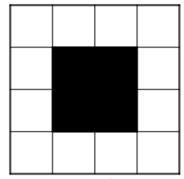
Ответ: 400г.

Вариант 2 задания №2

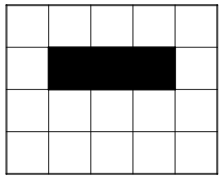
В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



вид спереди



вид сбоку



вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая «шахта» состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху.

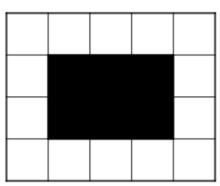
Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой «шахтой»). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 6 кубиков.

Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 6 = 38$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока двух кубиков равен 420г.

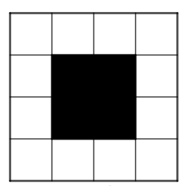
Ответ: 420г.

Вариант 3 задания №2

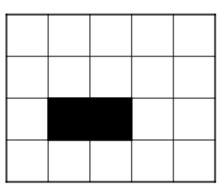
В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



вид спереди



вид сбоку



вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

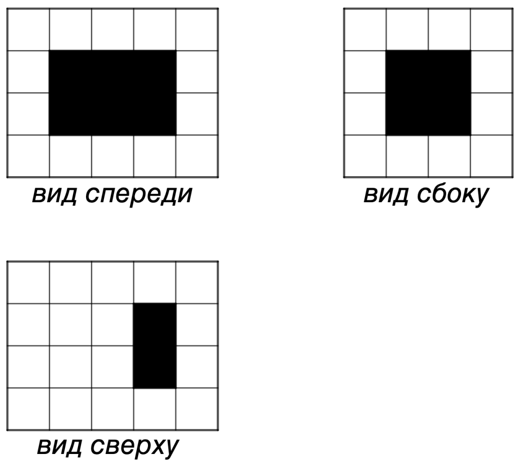
Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая «шахта» состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху.
Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой «шахтой»). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 4 кубика.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 4 = 36$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока четырёх кубиков равен 440г.

Ответ: 440г.

Вариант 4 задания №2

В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

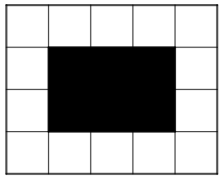
Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая «шахта» состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху.
Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой «шахтой»). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 4 кубика.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 4 = 36$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока четырёх кубиков равен 440г.

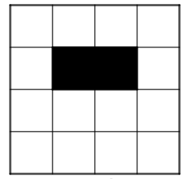
Ответ: 440г.

Вариант 5 задания №2

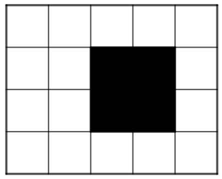
В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



вид спереди



вид сбоку



вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

Решение:

Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая «шахта» состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху.

Вырез сбоку будет задействовать по 2 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой «шахтой»). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 8 кубиков.

Итого из нашего бруска было удалено $24 + 4 + 8 = 36$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока четырёх кубиков равен 440г.

Ответ: 440г.

Задание №3 из 6 (6 кл). За столом сидели

Вариант 1 задания №3

За круглым столом сидят 8 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 4,5,6 или 7 лжецов.

Ответ: 4,5,6 или 7 лжецов.

Вариант 2 задания №3

За круглым столом сидят 9 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 5,6,7 или 8 лжецов.

Ответ: 5,6,7 или 8 лжецов.

Вариант 3 задания №3

За круглым столом сидят 10 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 5,6,7,8 или 9 лжецов.

Ответ: 5,6,7,8 или 9 лжецов.

Вариант 4 задания №3

За круглым столом сидят 11 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 6,7,8,9 или 10 лжецов.

Ответ: 6,7,8,9 или 10 лжецов.

Вариант 5 задания №3

За круглым столом сидят 12 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 6,7,8,9,10 или 11 лжецов.

Ответ: 6,7,8,9,10 или 11 лжецов.

Задание №4 из 6 (6 кл). Число Эдика

Вариант 1 задания №4

На доске написано число 202120212021. Эдик стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 18. Какое наибольшее число могло получиться у Эдика?

Решение:

Число делится на 18 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и делится на 9. Число делится на 2, если оно оканчивается на 0,2,4,6,8. В нашем случае – на 0 или 2. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6ти. Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число.
Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа не больше 2ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.
Заметим, что последнюю единицу нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 3 цифры с суммой 5. Это только $2 + 2 + 1$. Тогда вычёркиваем двойки максимально с конца, а единицы с начала (тогда число будет больше). Получаем число 20220210.

Ответ: 20220210

Вариант 2 задания №4

На доске написано число 202120212021. Эдик стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 45. Какое наибольшее число могло получиться у Эдика?

Решение:

Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и делится на 9. Число делится на 5, если оно оканчивается на 0,5. В нашем случае – на 0. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6ти. Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число.
Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа не больше 2ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.
Заметим, что последние 2 цифры нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 2 цифры с суммой 3. Это только $2 + 1$. Тогда вычёркиваем двойки максимально с конца, а единицы с начала (тогда число будет больше). Получаем число 20220210.

Ответ: 20220210

Вариант 3 задания №4

На доске написано число 220122012201. Эдик стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 18. Какое наибольшее число могло получиться у Эдика?

Решение:

Число делится на 18 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и делится на 9. Число делится на 2, если оно оканчивается на 0,2,4,6,8. В нашем случае – на 0 или 2. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6ти. Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число.

Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа не больше 2ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что последнюю единицу нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 3 цифры с суммой 5. Это только $2 + 2 + 1$. Тогда вычёркиваем двойки максимально с конца, а единицы с начала (тогда число будет больше). Получаем число 22022010.

Ответ: 22022010

Вариант 4 задания №4

На доске написано число 220122012201. Эдик стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 45. Какое наибольшее число могло получиться у Эдика?

Решение:

Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и делится на 9. Число делится на 5, если оно оканчивается на 0,5. В нашем случае – на 0. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6ти. Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число.

Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа не больше 2ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что последнюю цифру нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 3 цифры с суммой 5. Это только $2 + 2 + 1$. Тогда вычёркиваем двойки максимально с конца, а единицы с начала (тогда число будет больше). Получаем число 22022010.

Ответ: 22022010

Вариант 5 задания №4

На доске написано число 201220122012. Эдик стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 45. Какое наибольшее число могло получиться у Эдика?

Решение:

Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и делится на 9. Число делится на 5, если оно оканчивается на 0,5. В нашем случае – на 0. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6ти. Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число.

Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа не больше 2ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число не оканчивается на 0, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что последние 2 цифры нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 2 цифры с суммой 3. Это только $2 + 1$. Тогда вычёркиваем двойки максимально с конца, а единицы с начала (тогда число будет больше). Получаем число 20220120.

Ответ: 20220120

Задание №5 из 6 (6 кл). Оранжевое настроение

Вариант 1 задания №5

Гена купил Чебурашке два килограмма мандаринов и три килограмма апельсинов, потратив всего 800 рублей. При этом за мандарины он заплатил на 80 рублей больше, чем за апельсины. Старуха Шапокляк также купила Чебурашке мандаринов и апельсинов, причем за мандарины она заплатила в шесть раз меньше денег, чем за апельсины.
Сколько стоил килограмм мандаринов, и сколько килограмм апельсинов?
Чего Шапокляк купила больше, мандаринов или апельсинов и во сколько раз?

Решение:

Поскольку 2 килограмма мандаринов стоили на 80 рублей больше 3 килограммов апельсинов, а вместе они стоили 800 рублей, то 6 килограммов апельсинов стоили $800 - 80 = 720$ рублей. Тем самым килограмм апельсинов стоил $720 : 6 = 120$ рублей. Тогда два килограмма мандаринов стоят $120 \cdot 3 + 80 = 440$ рублей, а один килограмм мандаринов соответственно стоит 220 рублей.

Пусть теперь Шапокляк потратила на мандарины сумму в одну условную единицу, тогда на апельсины она потратила 6. Таким образом она купила $\frac{1}{220}$ мандаринов и $\frac{6}{120}$ апельсинов. Разделив вторую дробь на первую, получим, что Шапокляк купила в 11 раз больше апельсинов.

Ответ: Килограмм мандаринов стоил 220 рублей, килограмм апельсинов – 120 рублей. Шапокляк купила в 11 раз больше апельсинов.

Вариант 2 задания №5

Гена купил Чебурашке два килограмма мандаринов и три килограмма апельсинов, потратив всего 1000 рублей. При этом за мандарины он заплатил на 40 рублей больше, чем за апельсины. Старуха Шапокляк также купила Чебурашке мандаринов и апельсинов, причем за мандарины она заплатила в восемь раз меньше денег, чем за апельсины.
Сколько стоил килограмм мандаринов, и сколько килограмм апельсинов?
Чего Шапокляк купила больше, мандаринов или апельсинов и во сколько раз?

Решение:

Поскольку 2 килограмма мандаринов стоили на 40 рублей больше 3 килограммов апельсинов, а вместе они стоили 1000 рублей, то 6 килограммов апельсинов стоили $1000 - 40 = 9600$ рублей. Тем самым килограмм апельсинов стоил $960 : 6 = 16$ рублей. Тогда два килограмма мандаринов стоят $160 \cdot 3 + 40 = 520$ рублей, а один килограмм мандаринов соответственно стоит 260 рублей.

Пусть теперь Шапокляк потратила на мандарины сумму в одну условную единицу, тогда на апельсины она потратила 8. Таким образом она купила $\frac{1}{260}$ мандаринов и $\frac{8}{160}$ апельсинов. Разделив вторую дробь на первую, получим, что Шапокляк купила в 13 раз больше апельсинов.

Ответ: Килограмм мандаринов стоил 260 рублей, килограмм апельсинов – 160 рублей. Шапокляк купила в 13 раз больше апельсинов.

Вариант 3 задания №5

Гена купил Чебурашке три килограмма мандаринов и четыре килограмма апельсинов, потратив всего 1110 рублей. При этом за мандарины он заплатил на 150 рублей больше, чем за апельсины. Старуха Шапокляк также купила Чебурашке мандаринов и апельсинов, причем за мандарины она заплатила в восемь раз меньше денег, чем за апельсины.
Сколько стоил килограмм мандаринов, и сколько килограмм апельсинов?
Чего Шапокляк купила больше, мандаринов или апельсинов и во сколько раз?

Решение:

Поскольку 3 килограмма мандаринов стоили на 150 рублей больше 4 килограммов апельсинов, а вместе они стоили 1110 рублей, то 8 килограммов апельсинов стоили $1110 - 150 = 960$ рублей. Тем самым килограмм апельсинов стоил $960 : 8 = 120$ рублей. Тогда nhb килограмма мандаринов стоят $120 \cdot 4 + 150 = 630$ рублей, а один килограмм мандаринов соответственно стоит 210 рублей.

Пусть теперь Шапокляк потратила на мандарины сумму в одну условную единицу, тогда на апельсины она потратила 8. Таким образом она купила $\frac{1}{210}$ мандаринов и $\frac{8}{120}$ апельсинов. Разделив вторую дробь на первую, получим, что Шапокляк купила в 14 раз больше апельсинов.

Ответ: Килограмм мандаринов стоил 210 рублей, килограмм апельсинов – 120 рублей. Шапокляк купила в 14 раз больше апельсинов.

Вариант 4 задания №5

Гена купил Чебурашке два килограмма мандаринов и три килограмма апельсинов, потратив всего 780 рублей. При этом за мандарины он заплатил на 180 рублей больше, чем за апельсины. Старуха Шапокляк также купила Чебурашке мандаринов и апельсинов, причем за мандарины она заплатила в пять раз меньше денег, чем за апельсины.
Сколько стоил килограмм мандаринов, и сколько килограмм апельсинов?
Чего Шапокляк купила больше, мандаринов или апельсинов и во сколько раз?

Решение:

Поскольку 2 килограмма мандаринов стоили на 180 рублей больше 3 килограммов апельсинов, а вместе они стоили 780 рублей, то 6 килограммов апельсинов стоили $780 - 180 = 600$ рублей. Тем самым килограмм апельсинов стоил $600 : 6 = 100$ рублей. Тогда два килограмма мандаринов стоят $100 \cdot 3 + 180 = 480$ рублей, а один килограмм мандаринов соответственно стоит 240 рублей.

Пусть теперь Шапокляк потратила на мандарины сумму в одну условную единицу, тогда на апельсины она потратила 5. Таким образом она купила $\frac{1}{240}$ мандаринов и $\frac{5}{100}$ апельсинов. Разделив вторую дробь на первую, получим, что Шапокляк купила в 12 раз больше апельсинов.

Ответ: Килограмм мандаринов стоил 240 рублей, килограмм апельсинов – 100 рублей. Шапокляк купила в 12 раз больше апельсинов.

Вариант 5 задания №5

Гена купил Чебурашке два килограмма мандаринов и три килограмма апельсинов, потратив всего 900 рублей. При этом за мандарины он заплатил на 180 рублей больше, чем за апельсины. Старуха Шапокляк также купила Чебурашке мандаринов и апельсинов, причем за мандарины она заплатила в четыре раза меньше денег, чем за апельсины.

Сколько стоил килограмм мандаринов, и сколько килограмм апельсинов?
Чего Шапокляк купила больше, мандаринов или апельсинов и во сколько раз?

Решение:

Поскольку 2 килограмма мандаринов стоили на 180 рублей больше 3 килограммов апельсинов, а вместе они стоили 900 рублей, то 6 килограммов апельсинов стоили $900 - 180 = 720$ рублей. Тем самым килограмм апельсинов стоил $720 : 6 = 120$ рублей. Тогда два килограмма мандаринов стоят $120 \cdot 3 + 180 = 540$ рублей, а один килограмм мандаринов соответственно стоит 270 рублей.

Пусть теперь Шапокляк потратила на мандарины сумму в одну условную единицу, тогда на апельсины она потратила 4. Таким образом она купила $\frac{1}{270}$ мандаринов и $\frac{4}{120}$ апельсинов. Разделив вторую дробь на первую, получим, что Шапокляк купила в 9 раз больше апельсинов.

Ответ: Килограмм мандаринов стоил 270 рублей, килограмм апельсинов – 120 рублей. Шапокляк купила в 9 раз больше апельсинов.

Задание №6 из 6 (6 кл). Собираем три числа

Вариант 1 задания №6

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить два трёхзначных числа и одно четырёхзначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.
Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.
Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.
Цифры 3,2,0 – в разряде сотен.
Цифра 1 – в разряде тысяч.
Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в разряде десятков. В разрядке сотен, 0 может стоять только в четырёхзначном числе, то есть всего $2 \cdot 1 = 2$ варианта. В разряде тысяч очевидно только 1 вариант.
Итого $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 72$ варианта. Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят трёхзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на 2. Итого 36 способов, в любом из них получаем сумму равную 1674.

Ответ: Всего 36 способов. Наименьшая сумма равна 1674.

Вариант 2 задания №6

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить два четырёхзначных числа и одно двузначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.
Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.
Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.
Цифры 3,0 – в разряде сотен.
Цифры 2,1 – в разряде тысяч.
Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в разряде десятков. В разрядке сотен, всего $2 \cdot 1 = 2$ варианта. Аналогично в разряде тысяч.
Итого $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$ варианта. Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят

четырёхзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на 2. Итого 72 способов, в любом из них получаем сумму равную 3474.

Ответ: Всего 72 способа. Наименьшая сумма равна 3474.

Вариант 3 задания №6

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить два двузначных числа, и одно шестизначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.

Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.

Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.

Цифра 3 – в разряде сотен.

Цифры 2 – в разряде тысяч.

Цифра 0 – в разряде десятков тысяч.

Цифра 1 – в разряде сотен тысяч.

Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в разряде десятков.

В остальных разрядах ровно 1 вариант. Итого $6 \cdot 6 = 36$ вариантов.Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят двухзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на 2. Итого 18 способов, в любом из них получаем сумму равную 102474.

Ответ: Всего 18 способов. Наименьшая сумма равна 102474.

Вариант 4 задания №6

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить одно двузначное, одно трёхзначное и одно пятизначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.

Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.

Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.

Цифры 3,2 – в разряде сотен.

Цифра 0 – в разряде тысяч.

Цифра 1 – в разряде десятков тысяч.
Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в разряде десятков.
В разрядке сотен, всего $2 \cdot 1 = 2$ варианта. В остальных разрядах по 1 варианту.
Итого $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72$ варианта, любом из них получаем сумму равную 10674.

Ответ: Всего 72 способа. Наименьшая сумма равна 10674.

Вариант 5 задания №6

Сколькими способами из цифр от 1 до 9 можно составить три трёхзначных числа таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие.
Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.
Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.
Цифры 3,2,1 – в разряде сотен.
Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в остальных разрядах.
Итого $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ вариантов. Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят трёхзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на $3! = 6$. Итого 36 способов, в любом из них получаем сумму равную 774.

Ответ: Всего 36 способов. Наименьшая сумма равна 774.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

7 класс

8 заданий по 5 баллов

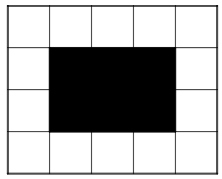
(максимум 40 баллов)

продолжительность 90 минут

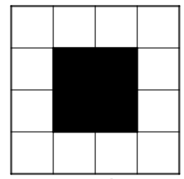
Задание №1 из 8 (7 кл). Дырявый брусок

Вариант 1 задания №1

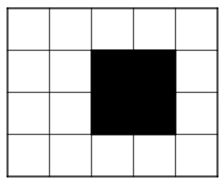
В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



вид спереди



вид сбоку



вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

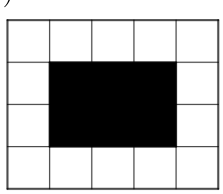
Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая "шахта"состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху. Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой "шахтой"). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 8 кубиков.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 8 = 40$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока кубиков равен 400г.

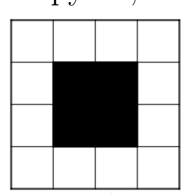
Ответ: 400г.

Вариант 2 задания №1

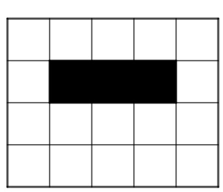
В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?



вид спереди



вид сбоку



вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

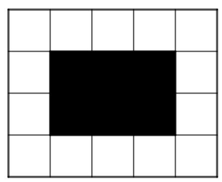
Решение:

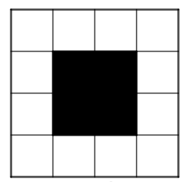
Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая "шахта"состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху. Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой "шахтой"). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 6 кубиков.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 6 = 38$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока двух кубиков равен 420г.

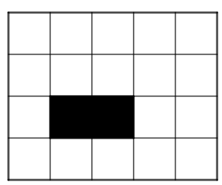
Ответ: 420г.

Вариант 3 задания №1

В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?


вид спереди


вид сбоку


вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

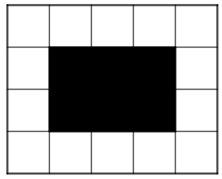
Решение:

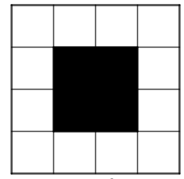
Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая "шахта"состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху. Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой "шахтой"). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 4 кубика.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 4 = 36$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока четырёх кубиков равен 440г.

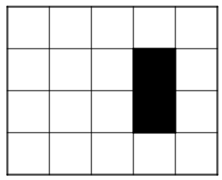
Ответ: 440г.

Вариант 4 задания №1

В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?


вид спереди


вид сбоку


вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

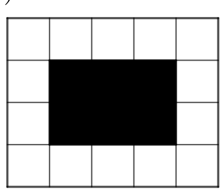
Решение:

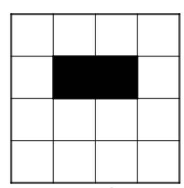
Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая "шахта"состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху. Вырез сбоку будет задействовать по 4 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой "шахтой"). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 4 кубика.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 8 + 4 = 36$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока четырёх кубиков равен 440г.

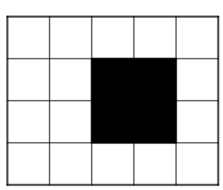
Ответ: 440г.

Вариант 5 задания №1

В бруске размером $5 \times 4 \times 4$ проделали три сквозные «шахты», параллельные его ребрам (входы в «шахты» показаны на рисунках). Сколько весит остаток бруска, если исходный брусок весит 800 г?


вид спереди


вид сбоку


вид сверху

Варианты ответов:
560г, 540г, 500г, 480г, 460г, 440г, 420г, 400г.

Решение:

Решение:

Брусок $5 \times 4 \times 4$ состоит из $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ маленьких кубиков. Тогда вес каждого из них составляет по $\frac{800}{80} = 10$ грамм. Заметим, что первая "шахта"состоит из $2 \times 3 \times 4 = 24$ кубиков (2 на 3 - это видимый прямоугольник, длина шахты равна длине бруска т.е. 4). Осталось проделать вырезы сбоку и сверху. Вырез сбоку будет задействовать по 2 дополнительных кубика с каждого из боков (внутренние кубики уже вырезаны первой "шахтой"). Аналогично для выреза сверху т.е. ещё 8 кубиков.
Итого из нашего бруска было удалено $24 + 4 + 8 = 36$ кубиков. Тогда вес оставшихся сорока четырёх кубиков равен 440г.

Ответ: 440г.

Задание №2 из 8 (7 кл). Сумма цифр

Вариант 1 задания №2

У шестизначного числа нашли сумму цифр. Затем, у получившегося числа снова нашли сумму цифр. Какое максимальное число могло получиться в результате?

Решение:

Заметим, что сумма цифр изначального числа не превосходит $9 \cdot 6 = 54$. Среди чисел от 1 до 54 наибольшую сумму цифр имеет число 49, докажем это. Числа от 50 до 54 имеют сумму цифр меньше 13. Про остальные числа заметим следующее: первая цифра числа не больше 4, а вторая не больше 9. Значит в итоге получим не больше 13. Пример: 999994.

Ответ: 13

Вариант 2 задания №2

У семизначного числа нашли сумму цифр. Затем, у получившегося числа снова нашли сумму цифр. Какое максимальное число могло получиться в результате?

Решение:

Заметим, что сумма цифр изначального числа не превосходит $9 \cdot 7 = 63$. Среди чисел от 1 до 63 наибольшую сумму цифр имеет число 59, докажем это. Числа от 60 до 63 имеют сумму цифр меньше. Про остальные числа заметим следующее: первая цифра числа не больше 5, а вторая не больше 9. Значит в итоге получим не больше 14. Пример: 9999995.

Ответ: 14

Вариант 3 задания №2

У восьмизначного числа нашли сумму цифр. Затем, у получившегося числа снова нашли сумму цифр. Какое максимальное число могло получиться в результате?

Решение:

Заметим, что сумма цифр изначального числа не превосходит $9 \cdot 8 = 72$. Среди чисел от 1 до 72 наибольшую сумму цифр имеет число 69, докажем это. Числа от 70 до 72 имеют сумму цифр меньше. Про остальные числа заметим следующее: первая цифра числа не больше 6, а вторая не больше 9. Значит в итоге получим не больше 15. Пример: 99999996.

Ответ: 15

Вариант 4 задания №2

У девятизначного числа нашли сумму цифр. Затем, у получившегося числа снова нашли сумму цифр. Какое максимальное число могло получиться в результате?

Решение:

Заметим, что сумма цифр изначального числа не превосходит $9 \cdot 9 = 81$. Среди чисел от 1 до 81 наибольшую сумму цифр имеет число 79, докажем это. Числа от 80 до 81 имеют сумму цифр меньше. Про остальные числа заметим следующее: первая цифра числа не больше 7, а вторая не больше 9. Значит в итоге получим не больше 16. Пример: 999999997.

Ответ: 16

Вариант 5 задания №2

У пятизначного числа нашли сумму цифр. Затем, у получившегося числа снова нашли сумму цифр. Какое максимальное число могло получиться в результате?

Решение:

Заметим, что сумма цифр изначального числа не превосходит $9 \cdot 5 = 45$. Среди чисел от 1 до 45 наибольшую сумму цифр имеет число 39, докажем это. Числа от 40 до 45 имеют сумму цифр меньше. Про остальные числа заметим следующее: первая цифра числа не больше 3, а вторая не больше 9. Значит в итоге получим не больше 12. Пример: 99993.

Ответ: 12

Задание №3 из 8 (7 кл). За столом сидели

Вариант 1 задания №3

За круглым столом сидят 8 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные – лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба – лжецы!», а другие – «Оба – рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 4,5,6 или 7 лжецов.

Ответ: 4,5,6 или 7 лжецов.

Вариант 2 задания №3

За круглым столом сидят 9 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 5,6,7 или 8 лжецов.

Ответ: 5,6,7 или 8 лжецов.

Вариант 3 задания №3

За круглым столом сидят 10 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 5,6,7,8 или 9 лжецов.

Ответ: 5,6,7,8 или 9 лжецов.

Вариант 4 задания №3

За круглым столом сидят 11 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 6,7,8,9 или 10 лжецов.

Ответ: 6,7,8,9 или 10 лжецов.

Вариант 5 задания №3

За круглым столом сидят 12 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду; остальные — лжецы, которые всегда говорят неправду(за столом были и рыцари, и лжецы). Каждого спросили: «Кто твои соседи?». Оказалось, что несколько ответили «Оба — лжецы!», а другие — «Оба — рыцари!». Сколько человек за столом могли быть лжецами? Перечислите все возможные варианты ответов.

Решение:

По условию за столом были и рыцари, и лжецы. Поэтому хотя бы 1 рыцарь там есть.
Предположим, что нашлись 2 рыцаря сидящих подряд, тогда каждый из них должен сказать – «Оба — рыцари!». Получаем, что все люди за столом обязаны быть рыцарями. Но тогда никто за столом не сказал – «Оба — лжецы!», что противоречит условию.
Осталось рассмотреть случаи, где рыцари сидят отдельно. Заметим, что любой такой случай возможен т.к. вокруг рыцарей сидят лжецы, каждый рыцарь говорит – «Оба — лжецы!». А лжецы всегда могут выбрать ответ, который будет ложью (для лжеца есть две фразы на выбор, одна из которых всегда ложь). Значит нам подойдут все варианты, в которых рыцари сидят отдельно. Легко проверить, что такая расстановка возможна тогда и только тогда, когда лжецов не меньше половины. Тогда возможные варианты для количества лжецов – 6,7,8,9,10 или 11 лжецов.

Ответ: 6,7,8,9,10 или 11 лжецов.

Задание №4 из 8 (7 кл). Тик-так

Вариант 1 задания №4

Любопытный Кирилл обратил внимание, что в 14:10 угол между часовой и минутной стрелкой равен X градусов. Немного подумав, Кирилл понял, что такое же значение угла между часовой и минутной стрелками будет в 21 час N минут. Найдите X. Найдите также N, если известно, что оно целое.

Решение:

Заметим, что часовая стрелка проходит целый круг $360°$ за 12 часов. Тогда за один час она проходит $30°$.
Поймём чему равен X. В 14:10 минутная стрелка стоит на цифре 2. Часовая же отошла от двойки на "10 минут". За 10 минут она пройдёт $30° \cdot \frac{10}{60} = 5°$.
Поймём чему равен N. Заметим, что в 21:50 и в 14:10 стрелки часов расположены симметрично относительно вертикальной оси. Значит и угол между стрелками в это время совпадает.

Ответ: $X = 5, N = 50$.

Вариант 2 задания №4

Любопытный Кирилл обратил внимание, что в 16:20 угол между часовой и минутной стрелкой равен X градусов. Немного подумав, Кирилл понял, что такое же значение угла между часовой и минутной стрелками будет в 19 часов N минут. Найдите X. Найдите также N, если известно, что оно целое.

Решение:

Заметим, что часовая стрелка проходит целый круг $360°$ за 12 часов. Тогда за один час она проходит $30°$.
Поймём чему равен X. В 16:20 минутная стрелка стоит на цифре 4. Часовая же отошла от чётверки на "20 минут". За 20 минут она пройдёт $30° \cdot \frac{20}{60} = 10°$.
Поймём чему равен N. Заметим, что в 19:40 и в 16:20 стрелки часов расположены симметрично относительно вертикальной оси. Значит и угол между стрелками в это время совпадает.

Ответ: $X = 10, N = 40$.

Вариант 3 задания №4

Любопытный Кирилл обратил внимание, что в 18:30 угол между часовой и минутной стрелкой равен X градусов. Немного подумав, Кирилл понял, что такое же значение угла между часовой и минутной стрелками будет в 17 часов N минут. Найдите X. Найдите также N, если известно, что оно целое.

Решение:

Заметим, что часовая стрелка проходит целый круг $360°$ за 12 часов. Тогда за один час она проходит $30°$.
Поймём чему равен X. В 18:30 минутная стрелка стоит на цифре 6. Часовая же отошла от двойки на "30 минут". За 30 минут она пройдёт $30° \cdot \frac{30}{60} = 15°$.

Поймём чему равен N. Заметим, что в 17:30 и в 18:30 стрелки часов расположены симметрично относительно вертикальной оси. Значит и угол между стрелками в это время совпадает.

Ответ: $X = 15, N = 30$.

Вариант 4 задания №4

Любопытный Кирилл обратил внимание, что в 20:40 угол между часовой и минутной стрелкой равен X градусов. Немного подумав, Кирилл понял, что такое же значение угла между часовой и минутной стрелками будет в 15 часов N минут. Найдите X. Найдите также N, если известно, что оно целое.

Решение:

Заметим, что часовая стрелка проходит целый круг $360°$ за 12 часов. Тогда за один час она проходит $30°$.

Поймём чему равен X. В 20:40 минутная стрелка стоит на цифре 8. Часовая же отошла от двойки на "40 минут". За 40 минут она пройдёт $30° \cdot \frac{40}{60} = 20°$.

Поймём чему равен N. Заметим, что в 20:40 и в 15:20 стрелки часов расположены симметрично относительно вертикальной оси. Значит и угол между стрелками в это время совпадает.

Ответ: $X = 20, N = 20$.

Вариант 5 задания №4

Любопытный Кирилл обратил внимание, что в 22:50 угол между часовой и минутной стрелкой равен X градусов. Немного подумав, Кирилл понял, что такое же значение угла между часовой и минутной стрелками будет в 13 часов N минут. Найдите X. Найдите также N, если известно, что оно целое.

Решение:

Заметим, что часовая стрелка проходит целый круг $360°$ за 12 часов. Тогда за один час она проходит $30°$.

Поймём чему равен X. В 22:50 минутная стрелка стоит на цифре 10. Часовая же отошла от двойки на "50 минут". За 50 минут она пройдёт $30° \cdot \frac{50}{60} = 25°$.

Поймём чему равен N. Заметим, что в 22:50 и в 13:10 стрелки часов расположены симметрично относительно вертикальной оси. Значит и угол между стрелками в это время совпадает.

Ответ: $X = 25, N = 10$.

Задание №5 из 8 (7 кл). Магический квадрат

Вариант 1 задания №5

В магическом квадрате стоят все числа от 1 до 16, причем сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей, должна быть одинаковой. На рисунке магический квадрат заполнен частично. Найдите, чему равна сумма в строчке, а также, какое число стоит в выделенной клеточке.

15	**4**	**?**	
8		**2**	
	14		**12**

Решение:

Сумма всех чисел в квадрате равна $1 + 2 + \ldots + 16 = 136$. Поскольку во всех строчках квадрата сумма чисел одинаковая, то она равна $136 : 4 = 34$.

Для удобства пронумеруем строчки и столбцы квадрата как в шахматах: **a,b,c,d** для столбцов слева направо и **1,2,3,4** для строчек снизу вверх. Число в клетке **b3** равно $34-15-12-2 = 5$(используется сумма на главной диагонали). Смотря на столбец **b** получаем, что число в клетке **b2** равно 11. Смотря на строчку номер **2**, находим, что в **d2** стоит 13.

Сумма неизвестных чисел в строчке **1** равна 8. Такую сумму можно получить, как 1+7, 2+6 или 3+5. Но числа 5 и 2 уже использованы, поэтому неизвестные числа это 1 и 7. Если поставить в клетку **a1** число 7, то в **a3** придется поставить 4, а это число уже есть в таблице. Поэтому в клетке **a1** стоит 1, в клетке **c1** – число 7, а в **a3** – 10.

Сумма неизвестных чисел в столбце **d** равна 9. Такую сумму можно получить, как 1+8, 2+7, 3+6 или 4+5. Но числа 1, 2 и 4 уже использованы, поэтому неизвестные числа это 3 и 6. Если поставить в клетку **d3** число 6, то в клетке **c3** должно стоять 13, но это число уже есть в таблице. Тем самым в **d3** стоит 3, а в **d4** – 6.

Теперь легко понять, что в **c3** стоит 16, а в искомой клетке **c4** – 9.

Ответ: Сумма в каждой строчке равна 34. Число в выделенной клетке равно 9.

Вариант 2 задания №5

В магическом квадрате стоят все числа от 1 до 16, причем сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей, должна быть одинаковой. На рисунке магический квадрат заполнен частично. Найдите, чему равна сумма в строчке, а также, какое число стоит в выделенной клеточке.

15	**6**		**?**
8		**2**	
	12		**14**

Решение:

Сумма всех чисел в квадрате равна $1+2+\ldots+16=136$. Поскольку во всех строчках квадрата сумма чисел одинаковая, то она равна $136:4=34$.

Для удобства пронумеруем строчки и столбцы квадрата как в шахматах: **a,b,c,d** для столбцов слева направо и **1,2,3,4** для строчек снизу вверх. Число в клетке **b3** равно $34-15-14-2=3$(используется сумма на главной диагонали). Смотря на столбец **b** получаем, что число в клетке **b2** равно 13. Смотря на строчку номер **2**, находим, что в **d2** стоит 11.

Сумма неизвестных чисел в столбце **d** равна 9. Такую сумму можно получить, как 1+8, 2+7, 3+6 или 4+5. Но числа 2, 3 и 8 уже использованы, поэтому неизвестные числа это 4 и 5. Предположим, что в **d4** стоит 5, тогда в **c3** должно стоять 8, но это число уже есть в таблице. Значит в искомой клетке стоит 4.

Ответ: Сумма в каждой строчке равна 34. Число в выделенной клетке равно 4.

Вариант 3 задания №5

В магическом квадрате стоят все числа от 1 до 16, причем сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей, должна быть одинаковой. На рисунке магический квадрат заполнен частично. Найдите, чему равна сумма в строчке, а также, какое число стоит в выделенной клеточке.

14	**4**		**?**
12		**3**	
	15		**8**

Решение:

Сумма всех чисел в квадрате равна $1+2+\ldots+16=136$. Поскольку во всех строчках квадрата сумма чисел одинаковая, то она равна $136:4=34$.
Для удобства пронумеруем строчки и столбцы квадрата как в шахматах: **a,b,c,d** для столбцов слева направо и **1,2,3,4** для строчек снизу вверх. Число в клетке **b3** равно $34-3-14-8=9$(используется сумма на главной диагонали). Смотря на столбец **b** получаем, что число в клетке **b2** равно 6. Смотря на строчку номер **2**, находим, что в **d2** стоит 13. Сумма неизвестных чисел в столбце **a** равна 8. Такую сумму можно получить, как 1+7, 2+6, или 3+5. Но числа 3 и 6 уже использованы, поэтому неизвестные числа это 1 и 7. Предположим, что в **a1** стоит 7, тогда в **c1** должно стоять 4, но это число уже есть в таблице. Поэтому в клетке **a1** стоит 1, в клетке **a3** – число 7, а в **c1** – 10.
Заметим теперь, что число 16 не может стоять ни в строчке **4**, ни в столбце **d**. Поэтому оно стоит в клетке **c3** и значит в искомой клетке **c4** – 11.

Ответ: Сумма в каждой строчке равна 34. Число в выделенной клетке равно 11.

Вариант 4 задания №5

В магическом квадрате стоят все числа от 1 до 16, причем сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей, должна быть одинаковой. На рисунке магический квадрат заполнен частично. Найдите, чему равна сумма в строчке, а также, какое число стоит в выделенной клеточке.

12	**6**		**?**
14		**5**	
	15		**8**

Решение:

Сумма всех чисел в квадрате равна $1+2+\ldots+16=136$. Поскольку во всех строчках квадрата сумма чисел одинаковая, то она равна $136:4=34$.
Для удобства пронумеруем строчки и столбцы квадрата как в шахматах: **a,b,c,d** для столбцов слева направо и **1,2,3,4** для строчек снизу вверх. Число в клетке **b3** равно $34-12-5-8=9$(используется сумма на главной диагонали). Смотря на столбец **b** получаем, что число в клетке **b2** равно 4. Смотря на строчку номер **2**, находим, что в **d2** стоит 11.
Сумма неизвестных чисел в столбце **a** равна 8. Такую сумму можно получить, как 1+7, 2+6, или 3+5. Но числа 5 и 6 уже использованы, поэтому неизвестные числа это 1 и 7. Предположим, что в **a1** стоит 7, тогда в **c1** должно стоять 4, но это число уже есть в таблице. Поэтому в клетке **a1** стоит 1, в клетке **a3** – число 7, а в **c1** – 10.

Заметим теперь, что число 16 не может стоять ни в строчке **4**, ни в столбце **d**. Поэтому оно стоит в клетке **c3** и значит в искомой клетке **c4** – 13.

Ответ: Сумма в каждой строчке равна 34. Число в выделенной клетке равно 13.

Вариант 5 задания №5

В магическом квадрате стоят все числа от 1 до 16, причем сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей, должна быть одинаковой. На рисунке магический квадрат заполнен частично. Найдите, чему равна сумма в строчке, а также, какое число стоит в выделенной клеточке.

12	**6**		**?**
8		**5**	
	15		**14**

Решение:

Сумма чисел во всей таблице равна сумме чисел от 1 до 16 т.е. $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$. Эта же сумма равна сумме 4 столбцов, значит сумма чисел в каждом столбце равна 34.

Теперь начнём вычислять числа в квадрате. На главной диагонали знаем 3 числа, вычисляем последнее, получаем 3. Теперь знаем 3 числа во втором столбце, вычисляем последнее, получаем 10. Теперь знаем 3 числа в третьей строке, вычисляем последнее, получаем 11.

Заметим, что сумма двух неизвестных чисел в последней строке равна пяти. Среди оставшихся чисел только у 1 и 4 будет сумма равная пяти.

Цифра 4 не может стоять в левом нижнем углу т.к. тогда оставшееся в первом столбце число будет равно десяти, но 10 уже занято.

Тогда 1 стоит в нижнем углу, а 4 стоит на пересечении четвёртой строки и третьего столбца. Вычисляем оставшееся число в 1 столбце, получаем 9.

Остался незаполненным только верхний правый квадрат 2×2. Сумма неизвестных чисел в последнем столбце равна девяти. Из оставшихся чисел такую сумму имеют только 2 и 7. Заметим, что 2 не может стоять в правом верхнем углу т.к. тогда сумма трёх известных чисел на главной диагонали равна тринадцати. Тогда оставшееся число на главной диагонали – 11, но оно уже занято.

Значит, 7 стоит в правом верхнем углу.

Ответ: Сумма в каждой строчке равна 34. Число в выделенной клетке равно 7.

Задание №6 из 8 (7 кл). Уборка в отеле

Вариант 1 задания №6

В гостинице «Гильберт» решили сделать уборку и у 500 подряд идущих комнат отполировали дверные номера. В результате почистили 2021 цифру. Какой был номер у комнаты, с которой начали уборку?

Решение:

Разделим 2021 на 500, чтобы узнать примерное количество цифр в номерах комнат. Получим чуть больше 4-х. То есть у нас будет какое-то количество четырёхзначных номеров и немного пятизначных номеров. Пусть четырёхзначных было x штук, тогда пятизначных будет $500 - x$. Общее количество цифр: $4x + 5(500 - x) = 2021$. Откуда $x = 479$. То есть у нас будет всего 479 четырёхзначных номеров, дальше пойдут пятизначные.

Тогда первый четырёхзначный номер есть $10000 - 479 = 9521$.

Ответ: 9521

Вариант 2 задания №6

В гостинице «Гильберт» решили сделать уборку и у 490 подряд идущих комнат отполировали дверные номера. В результате почистили 2021 цифру. Какой был номер у комнаты, с которой начали уборку?

Решение:

Разделим 2021 на 490, чтобы узнать примерное количество цифр в номерах комнат. Получим чуть больше 4ёх. То есть у нас будет какое-то количество четырёхзначных номеров и немного пятизначных номеров. Пусть четырёхзначных было x штук, тогда пятизначных будет $490 - x$. Общее количество цифр: $4x + 5(490 - x) = 2021$. Откуда $x = 429$. То есть у нас будет всего 429 четырёхзначных номеров, дальше пойдут пятизначные.

Тогда первый четырёхзначный номер есть $10000 - 429 = 9571$.

Ответ: 9571

Вариант 3 задания №6

В гостинице «Гильберт» решили сделать уборку и у 480 подряд идущих комнат отполировали дверные номера. В результате почистили 2021 цифру. Какой был номер у комнаты, с которой начали уборку?

Решение:

Разделим 2021 на 480, чтобы узнать примерное количество цифр в номерах комнат. Получим чуть больше 4ёх. То есть у нас будет какое-то количество четырёхзначных номеров и немного пятизначных номеров. Пусть четырёхзначных было x штук, тогда пятизначных будет $480 - x$. Общее количество цифр: $4x + 5(480 - x) = 2021$. Откуда $x = 379$. То есть у нас будет всего 379 четырёхзначных номеров, дальше пойдут пятизначные.

Тогда первый четырёхзначный номер есть $10000 - 379 = 9621$.

Ответ: 9621

Вариант 4 задания №6

В гостинице «Гильберт» решили сделать уборку и у 470 подряд идущих комнат отполировали дверные номера. В результате почистили 2021 цифру. Какой был номер у комнаты, с которой начали уборку?

Решение:

Разделим 2021 на 470, чтобы узнать примерное количество цифр в номерах комнат. Получим чуть больше 4ёх. То есть у нас будет какое-то количество четырёхзначных номеров и немного пятизначных номеров. Пусть четырёхзначных было x штук, тогда пятизначных будет $470 - x$. Общее количество цифр: $4x+5(470-x) = 2021$. Откуда $x = 329$. То есть у нас будет всего 479 четырёхзначных номеров, дальше пойдут пятизначные.

Тогда первый четырёхзначный номер есть $10000 - 329 = 9671$.

Ответ: 9671

Вариант 5 задания №6

В гостинице «Гильберт» решили сделать уборку и у 460 подряд идущих комнат отполировали дверные номера. В результате почистили 2021 цифру. Какой был номер у комнаты, с которой начали уборку?

Решение:

Разделим 2021 на 460, чтобы узнать примерное количество цифр в номерах комнат. Получим чуть больше 4-х. То есть у нас будет какое-то количество четырёхзначных номеров и немного пятизначных номеров. Пусть четырёхзначных было x штук, тогда пятизначных будет $460 - x$. Общее количество цифр: $4x+5(460-x) = 2021$. Откуда $x = 279$. То есть у нас будет всего 279 четырёхзначных номеров, дальше пойдут пятизначные.

Тогда первый четырёхзначный номер есть $10000 - 279 = 9721$.

Ответ: 9721

Задание №7 из 8 (7 кл). Число Васи

Вариант 1 задания №7

На доске написано число 202120212021. Вася стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 36. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?

Решение:

Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число образованное 2-мя его последними цифрами делится на 4. В нашем случае всего 2 возможных варианта – 20 и 12.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9-ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6-ти.

Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число. Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа на больше 2-ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что последнюю единицу нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 3 цифры с суммой 5. Это только $2 + 2 + 1$. Значит, мы не можем вычеркнуть цифру 0. Тогда наше число точно оканчивается на 20 т.е. надо точно вычеркнуть последние 2 цифры. Из оставшихся цифр нужно вычеркнуть 1 и 2. Единицу лучше вычеркнуть с начала, а двойку с конца. Тогда итоговое число 20220120.

Ответ: 20220120

Вариант 2 задания №7

На доске написано число 220122012201. Вася стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 36. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?

Решение:

Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число образованное 2мя его последними цифрами делится на 4. В нашем случае всего 2 возможных варианта – 20 и 12.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит, сумма цифр полученного числа должна быть равна 9-ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6-ти.

Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число. Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа на больше 2-ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит, нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что последнюю единицу нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 3 цифры с суммой 5. Это только $2 + 2 + 1$. Значит, мы не можем вычеркнуть цифру 0. Тогда наше число точно оканчивается на 20. Из оставшихся цифр нужно вычеркнуть 2,2 и 1. Единицу лучше вычеркнуть с начала, а двойку с конца. Тогда итоговое число 22020120.

Ответ: 22020120

Вариант 3 задания №7

На доске написано число 102210221022. Вася стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 36. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?

Решение:

Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число образованное 2мя его последними цифрами делится на 4. В нашем случае всего 2 возможных варианта – 20 и 12.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9-ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6ти.

Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число. Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа на больше 2-ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число не будет оканчиваться на 20 или 12 т.к. для этого нужно вычеркнуть либо 0, либо 1. Значит, нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что 6 представляется в виде суммы 4-х слагаемых только 2мя способами: $2 + 2 + 2 + 0$ или $2 + 2 + 1 + 1$. В первом случае мы обязаны убрать последний ноль и оставить в конце 12. Тогда максимальное число будет 10221012. Во втором случае, мы должны оставить на конце 20 т.е. убрать 2,2 и 1 с конца. Тогда максимальное число 10220220. Получилось меньше.

Ответ: 10221012

Вариант 4 задания №7

На доске написано число 210221022102. Вася стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 36. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?

Решение:

Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число образованное 2мя его последними цифрами делится на 4. В нашем случае всего 2 возможных варианта – 20 и 12.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9-ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6-ти.

Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число. Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа на больше 2-ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число не будет оканчиваться на 20 или 12 т.к. для этого нужно вычеркнуть либо 0, либо 1. Значит, нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что 6 представляется в виде суммы 4-х слагаемых только 2-мя способами: $2 + 2 + 2 + 0$ или $2 + 2 + 1 + 1$. В первом случае мы обязаны убрать последний ноль и оставить в конце 12. Тогда максимальное число будет 21021012. Во втором случае, мы должны оставить на конце 20 т.е. убрать 1 и 2 с конца. Тогда максимальное число 21022020. Получилось больше.

Ответ: 21022020

Вариант 5 задания №7

На доске написано число 202121022021. Вася стер у этого числа несколько цифр и получил число, которое делится на 36. Какое наибольшее число могло получиться у Васи?

Решение:

Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число образованное 2мя его последними цифрами делится на 4. В нашем случае всего 2 возможных варианта – 20 и 12.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9. В нашем случае сумма цифр равна 15. Единственное число от 1 до 15, которое делится на 9, это 9. Значит сумма цифр полученного числа должна быть равна 9-ти. То есть мы должны вычеркнуть цифры с общей суммой равной 6-ти.

Заметим, что чем меньше цифр будет вычеркнуто, тем больше будет число. Докажем, что 3 цифры вычеркнуть не получится. Действительно, цифры нашего числа на больше 2-ух. Нам нужно вычеркнуть 3 цифры с суммой 6. То есть вычеркнуть три двойки. Но тогда наше число оканчивается на 1, что невозможно. Значит нужно вычеркнуть хотя бы 4 цифры.

Заметим, что последнюю единицу нужно вычеркнуть в любом случае. Остаётся 3 цифры с суммой 5. Это только $2 + 2 + 1$. Значит мы не можем вычеркнуть цифру 0. Тогда наше число точно оканчивается на 20 т.е. надо точно вычеркнуть последние 2 цифры. Из оставшихся цифр нужно вычеркнуть 1 и 2. единицу лучше вычеркнуть с начала, а двойку с конца. Тогда итоговое число 20221020.

Ответ: 20221020

Задание №8 из 8 (7 кл). Собираем 3 числа

Вариант 1 задания №8

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить два трёхзначных числа и одно четырёхзначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.

Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.

Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.

Цифры 3,2,0 – в разряде сотен.

Цифра 1 – в разряде тысяч.

Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$. Аналогично в разряде десятков. В разрядке сотен, 0 может стоять только в четырёхзначном числе, то есть всего $2 \cdot 1 = 2$ варианта. В разряде тысяч очевидно только 1 вариант.

Итого $6{\cdot}6{\cdot}2{\cdot}1 = 72$ варианта. Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят трёхзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на 2. Итого 36 способов, в любом из них получаем сумму равную 1674.

Ответ: Всего 36 способов. Наименьшая сумма равна 1674.

Вариант 2 задания №8

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить два четырёхзначных числа и одно двузначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.

Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.

Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.

Цифры 3,0 – в разряде сотен.

Цифры 2,1 – в разряде тысяч.

Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$. Аналогично в разряде десятков. В разрядке сотен, всего $2 \cdot 1 = 2$ варианта. Аналогично в разряде тысяч.

Итого $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$ варианта. Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят четырёхзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на 2. Итого 72 способов, в любом из них получаем сумму равную 3474.

Ответ: Всего 72 способа. Наименьшая сумма равна 3474.

Вариант 3 задания №8

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить два двузначных числа, и одно шестизначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.

Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.

Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.

Цифра 3 – в разряде сотен.

Цифры 2 – в разряде тысяч.

Цифра 0 – в разряде десятков тысяч.

Цифра 1 – в разряде сотен тысяч.

Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в разряде десятков.

В остальных разрядах ровно 1 вариант. Итого $6 \cdot 6 = 36$ вариантов.Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят двухзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на 2. Итого 18 способов, в любом из них получаем сумму равную 102474.

Ответ: Всего 18 способов. Наименьшая сумма равна 102474.

Вариант 4 задания №8

Сколькими способами из цифр от 0 до 9 можно составить одно двузначное, одно трёхзначное и одно пятизначное число таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие. Также 0 не может стоять в начале числа, значит ставим его в наибольший доступный разряд.

Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.

Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.

Цифры 3,2 – в разряде сотен.

Цифра 0 – в разряде тысяч.

Цифра 1 – в разряде десятков тысяч.
Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в разряде десятков.
В разрядке сотен, всего $2 \cdot 1 = 2$ варианта. В остальных разрядах по 1 варианту.
Итого $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72$ варианта, любом из них получаем сумму равную 10674.

Ответ: Всего 72 способа. Наименьшая сумма равна 10674.

Вариант 5 задания №8

Сколькими способами из цифр от 1 до 9 можно составить три трёхзначных числа таким образом, чтобы их сумма была наименьшей из возможных? Чему равна эта сумма? (Каждую цифру можно использовать только один раз. С нуля числа начинаться не могут. Варианты, отличающиеся порядком чисел в них, считаются одинаковыми)).

Решение:

Заметим, что вклад каждой цифры в итоговую сумму зависит от разряда, в котором эта цифра стоит. И не зависит от числа, в котором находится эта цифра. Значит нам нужно расставить большие числа в самые маленькие разряды, числа поменьше – в самые большие.
Цифры 9,8,7 – будут в разряде единиц.
Цифры 6,5,4 – в разряде десятков.
Цифры 3,2,1 – в разряде сотен.
Тогда всего вариантов расставить цифры в разряде единиц $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Аналогично в остальных разрядах.
Итого $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ вариантов. Осталось заметить, что нам неважно в каком порядке стоят трёхзначные числа, значит нужно поделить на количество способов их переставить т.е. на $3! = 6$. Итого 36 способов, в любом из них получаем сумму равную 774.

Ответ: Всего 36 способов. Наименьшая сумма равна 774.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

8 заданий по 5 баллов

(максимум 40 баллов)

продолжительность 90 минут

Задание №1 из 8 (8 кл). Верные утверждения

Вариант 1 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике биссектриса равна медиане, то он — равнобедренный или равносторонний.

б) В произвольном треугольнике всегда найдутся два угла, разность градусных мер которых не превосходит по модулю 60°.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 9, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные два результата сложить, то результат будет делиться на 9.

г) Минимальное четырехзначное число, записанное разными цифрами, которое делится на 6 — это 1236.

д) Если графики линейных функций перпендикулярны, то угловые коэффициенты таких линейных функций в произведении дают (-1).

Решение:

а) нет, неверно. Если биссектриса и медианы проведены из разных вершин, то треугольник не обязательно равнобедренный.

б) да, верно. Пусть это было бы не верно: возьмем самый меньший угол, тогда средний по величине как минимум на 60 градусов больше, а самый больший минимум на 120 градусов больше, так как он на 60 градусов больше среднего, но тогда сумма углов была бы не меньше суммы утроенного меньшего угла и 180 градусов, что противоречит сумме углов треугольника;

в) да, верно. Так как остаток при делении на 9 числа и суммы его цифр совпадает, то получается, раз сумма чисел делилась на 9 (остаток был равен 0 при делении на 9), то остаток от суммы суммы цифр будет также равен 0 при делении на 9;

г) нет, неверно. Число из условия — 1026. Заметим, что минимальное четырёхзначное число, записанное разными цифрами — 1023, но оно не делится на 6. 1024, 1025 также не делятся на 6, значит 1026 — минимальное число, записанное разными цифрами и делящееся на 6;

д) да, верно. Условие перпендикулярности двух графиков линейных функций.

Ответ: б,в,д

Вариант 2 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике медиана равна высоте, то он — равнобедренный или равносторонний.

б)Существует треугольник, в котором разность двух градусных мер углов равна 60°.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 5, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 5.

г) Минимальное пятизначное число, которое записано разными цифрами и делится нацело на 5 — это 12345.

д) Если графики линейных функций перпендикулярны, то угловые коэффициенты таких линейных функций в произведении дают 1.

Решение:

а) нет, неверно. Возьмем прямоугольный треугольник с углом в 30 градусов. Катет, равный половине гипотенузе (напротив угла в 30 градусов) будем считать высотой и он равен медиане, проведенной к гипотенузе, при этом треугольник — не равнобедренный;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов;

в) нет, неверно. Контрпример числа 14 и 11: суммы цифр равны 5 и 2 и если их сложить, 7 не разделится на 5;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условия задачи, является 10235. Минимальным пятизначным числом с разными цифрами является 10234, но оно не делится на 5, следующее за ним число 10235 подходит под условия задачи;

д) нет, неверно. Угловые коэффициенты перпендикулярных графиков линейных функций в произведении дают (-1).

Ответ: б

Вариант 3 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике медиана совпадает с биссектрисой, то он — равнобедренный или равносторонний.

б) Существует треугольник, в котором один угол в 6 раз больше другого.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 7, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 7.

г) Минимальное пятизначное число, которое записано разными цифрами и делится на 4 — это 12348.

д) Если графики линейных функций параллельны, то угловые коэффициенты таких линейных функций равны.

Решение:

а) да, верно. Признак равнобедренности треугольника;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 10, 60 и 110 градусов;

в) нет, неверно. Контрпример числа 14 и 21: суммы цифр равны 5 и 3 и если их сложить, 8 не разделится на 7;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условие задачи является 10236. Минимальным пятизначным числом с разными цифрами является 10234, но оно не делится на 4, следующее за ним число 10235 также не делится на 4, а 10236 подходит под условия задачи;

д) да, верно. Условие параллельности графиков линейных функций.

Ответ: а,б,д

Вариант 4 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике совпала биссектриса и высота, то такой треугольник всегда равнобедренный или равносторонний.

б) В любом треугольнике градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 3, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 3.
г) Минимальное четырехзначное число, записанное разными цифрами и делится нацело на 4 — это 1236.
д) Если графики линейных функций параллельны, то угловые коэффициенты таких линейных функций в сумме дают 0.

Решение:

а) да, верно. Признак равнобедренности треугольника;

б) нет, неверно. В равностороннем треугольнике все углы равны и нет пары углов, отличающихся хотя бы на 30 градусов;

в) да, верно. Так как остаток при делении на 3 числа и суммы его цифр совпадает, то получается, раз сумма чисел делилась на 3 (остаток был равен 0 при делении на 3), то остаток от суммы суммы цифр будет также равен 0 при делении на 3;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условие задачи является 1024. Минимальным четырёхзначным числом с разными цифрами является 1023, но оно не делится на 4, следующее за ним число 1024 подходит под условия задачи;

д) нет, неверно. Угловые коэффициенты параллельных графиков линейных функций равны.

Ответ: а, в

Вариант 5 задания №1

Выберите верные утверждения:
а) Если в треугольнике медиана совпала с высотой, то треугольник — равнобедренный или равносторонний.
б) Существует треугольник, в котором градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.
в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 4, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 4.
г) Минимальное пятизначное число, записанное разными цифрами и делится нацело на 3 — это 12345.
д) Если графики линейных функций параллельны, то угловые коэффициенты таких линейных функций в произведении дают (-1).

Решение:

а) да, верно. Признак равнобедренности треугольника;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 10, 50 и 120 градусов;

в) нет, неверно. Контрпример: числа 12 и 16, их суммы цифр равны 3 и 7 соответственно, если их сложить получится 10, которое не делится на 4;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условие задачи является 10236. Минимальным пятизначным числом с разными цифрами является 10234, но оно не делится на 3, следующее за ним число 10235 также не делится на 3, а 10236 подходит под условия задачи;

д) нет, неверно. Угловые коэффициенты параллельных графиков линейных функций равны.

Ответ: а,б

Задание №2 из 8 (8 кл). Округление

Вариант 1 задания №2

Число x округлили до тысячных, полученное число округлили до сотых, и полученное число округлили до десятых. Получили 0,7. Какое наименьшее значение могло принимать x? («5» округляются вверх)

Решение:

Рассмотрим все округления в обратном порядке. После 2ого округления число не могло быть меньше, чем 0,65. После 1ого не меньше 0,645. Тогда изначальное число не меньше 0,6445.

Ответ: 0,6445

Вариант 2 задания №2

Число x округлили до тысячных, полученное число округлили до сотых, и полученное число округлили до десятых. Получили 0,3. Какое наименьшее значение могло принимать x? («5» округляются вверх)

Решение:

Рассмотрим все округления в обратном порядке. После 2ого округления число не могло быть меньше, чем 0,25. После 1ого не меньше 0,245. Тогда изначальное число не меньше 0,2445.

Ответ: 0,2445

Вариант 3 задания №2

Число x округлили до тысячных, полученное число округлили до сотых, и полученное число округлили до десятых. Получили 0,4. Какое наименьшее значение могло принимать x? («5» округляются вверх)

Решение:

Рассмотрим все округления в обратном порядке. После 2ого округления число не могло быть меньше, чем 0,35. После 1ого не меньше 0,345. Тогда изначальное число не меньше 0,3445.

Ответ: 0,3445

Вариант 4 задания №2

Число x округлили до тысячных, полученное число округлили до сотых, и полученное число округлили до десятых. Получили 0,6. Какое наименьшее значение могло принимать x? («5» округляются вверх)

Решение:

Рассмотрим все округления в обратном порядке. После 2ого округления число не могло быть меньше, чем 0,55. После 1ого не меньше 0,545. Тогда изначальное число не меньше 0,5445.

Ответ: 0,5445

Вариант 5 задания №2

Число x округлили до тысячных, полученное число округлили до сотых, и полученное число округлили до десятых. Получили 1,6. Какое наименьшее значение могло принимать x? («5» округляются вверх)

Решение:

Рассмотрим все округления в обратном порядке. После 2ого округления число не могло быть меньше, чем 1,55. После 1ого не меньше 1,545. Тогда изначальное число не меньше 1,5445.

Ответ: 1,5445

Задание №3 из 8 (8 кл). Углы в треугольнике

Вариант 1 задания №3

В треугольнике ABC AA_1 и CC_1 - биссектрисы. Оказалось, что $\angle AA_1C = 2\angle AC_1C$. Чему равен угол BAC?

Решение:

Обозначим $\angle BAA_1 = \angle A_1AC = \alpha$, а $\angle BCC_1 = C_1CA = \beta$. Тогда из суммы углов треугольника AA_1C имеем: $\angle AA_1C = 180° - \alpha - 2\beta$. Аналогично, в треугольнике AC_1C имеем: $\angle AC_1C = 180° - 2\alpha - \beta$. По условию, $\angle AA_1C = 2\angle AC_1C$. То есть, $180° - \alpha - 2\beta = 2 \cdot (180° - 2\alpha - \beta)$. Сокращаем, получаем: $3\alpha = 180°$. Значит, $\alpha = 60°$, а искомый $\angle BAC = 2\alpha = 120°$.

Ответ: 120°

Вариант 2 задания №3

В треугольнике ABC провели высоту AA_1, основание которой попало на сторону BC. BB_1 - биссектриса треугольника ABC. Оказалось, что $2\angle AB_1B = \angle BAA_1$. Чему равен угол BAC?

Решение:

Обозначим $\angle AB_1B$ за α, $\angle ABB_1$ за β. Тогда $\angle BAA_1 = 2\alpha$, $\angle B_1BC = \angle ABB_1 = \beta$. Рассмотрим ΔAA_1B: $\angle BAA_1 = 2\alpha, \angle ABA_1 = 2\beta, \angle AA_1B = 90°$ т.к. AA_1 – высота. Сумма углов ΔAA_1B равна $2\alpha + 2\beta + 90°$. Тогда $2\alpha + 2\beta = 90°$, $\alpha + \beta = 45°$. Заметим, что в ΔABB_1: $\angle BAB_1 = 180° - \angle ABB_1 - \angle AB_1B = 180° - \alpha - \beta = 135°$. Значит $\angle BAC = 135°$.

Ответ: 135°

Вариант 3 задания №3

В треугольнике ABC угол A на $90°$ больше угла C. Провели биссектрису треугольника BL. Чему равен $\angle ALB$?

Решение:

Обозначим $\angle BCA$ за α, $\angle ABL$ за β. Тогда $\angle ABC = 2\beta$ (BL – биссектриса), $\angle BAC = 90° + \angle BCA = 90° + \alpha$ (из условия). Рассмотрим сумму углов треукгольника ABC : $180° = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2\beta + \alpha + 90° + \alpha$. Откуда $2\alpha + 2\beta = 90°$, $\alpha + \beta = 45°$. Заметим, что $\angle BLA$ – внешний для ΔBCL. Значит, по теореме о внешнем угле: $\angle BLA = \angle LBC + \angle LCB = \alpha + \beta = 45°$.

Ответ: 45°

Вариант 4 задания №3

В треугольнике ABC провели биссектрисы AA_1 и CC_1, которые пересеклись в точке I. Оказалось, что $\angle AIC = 3\angle ABC$. Чему равен $\angle ABC$?

Решение:

Обозначим: $\angle CAA_1 = \angle BAA_1 = \alpha$, $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = \gamma$, $\angle ABC = \beta$.

Тогда по сумме углов треугольника ABC: $2\alpha + 2\gamma + \beta = 180°$.

По сумме углов треугольника AIC: $\angle AIC = 180° - \alpha - \gamma = 90° + \frac{\beta}{2}$.

Из условия получаем: $90^\circ + \frac{\beta}{2} = 3\beta$, откуда $\beta = 36^\circ$.

Ответ: 36°

Вариант 5 задания №3

В треугольнике ABC провели биссектрисы AA_1 и CC_1, которые пересеклись в точке I. Оказалось, что $\angle AIC = 2\angle ABC$. Чему равен $\angle ABC$?

Решение:

Обозначим: $\angle CAA_1 = \angle BAA_1 = \alpha$, $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = \gamma$, $\angle ABC = \beta$.

Тогда по сумме углов треугольника ABC: $2\alpha + 2\gamma + \beta = 180^\circ$.

По сумме углов треугольника AIC: $\angle AIC = 180^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Из условия получаем: $90^\circ + \frac{\beta}{2} = 2\beta$, откуда $\beta = 60^\circ$.

Ответ: 60°

Задание №4 из 8 (8 кл). Последовательность цифр

Вариант 1 задания №4

Учитель написал по два утверждения про натуральные числа a, b, c на доску в три строки:

1 строка: 1) $a+b+c=20$, 2) $abc=54$;

2 строка: 1) наибольшее число равно 11, 2) наименьшее из чисел равно 3;

3 строка: 1) $a=b=c$, 2) числа a, b и c — простые.

Известно, что в каждой строке одно утверждение верное, одно – неверное. Найдите числа a, b, c.

Решение:

Рассмотрим первое утверждение в последней строке: $a=b=c$. Заметим, что оно противоречит первому утверждению из первой строки: $a+b+c=20$ т.к. сумма равных чисел должна делится на 3. Также, оно противоречит второму утверждению из первой строки: $abc=54$ т.к. произведение трёх равных чисел должно быть кубом натурального числа. Тогда утверждение: $a=b=c$ не может быть верным т.к. противоречит одному из верных утверждений.

Значит, второе утверждение из 3 строки верное. Числа a, b и c – простые.

Рассмотрим утверждение: $abc=54$. Разложим 54 на простые множители.

$54=2\cdot 3^3$.

Видим, что 54 не представимо в виде произведения трёх простых чисел. Тогда это утверждение неверно. Значит, $a+b+c=20$ – верное утверждение.

Сумма трёх чисел равна чётному числу, тогда все три числа не могут быть нечётными. Значит, среди наших простых чисел есть чётное. А это только число 2.

Утверждение: наименьшее из чисел равно 3 – неверно т.к. среди наших чисел заведомо есть двойка. Тогда наибольшее число равно 11.

Нашли уже два из трёх чисел: 2 и 11. Из утверждения:$a+b+c=20$, находим, что среднее число равно 7.

Ответ: $2, 7, 11$.

Вариант 2 задания №4

Учитель написал по два утверждения про натуральные числа a, b, c на доску в три строки:

1 строка: 1) $a+b+c=22$, 2) $abc=48$;

2 строка: 1) наибольшее число равно 13, 2) наименьшее из чисел равно 5;

3 строка: 1) $a=b=c$, 2) числа a, b и c — простые.

Известно, что в каждой строке одно утверждение верное, одно – неверное. Найдите числа a, b, c.

Решение:

Рассмотрим первое утверждение в последней строке: $a=b=c$. Заметим, что оно противоречит первому утверждению из первой строки: $a+b+c=22$ т.к. сумма равных чисел должна делится на 3. Также, оно противоречит второму утверждению из первой строки: $abc=48$ т.к. произведение трёх равных чисел должно быть кубом натурального числа. Тогда утверждение: $a=b=c$ не может быть верным т.к. противоречит одному из верных утверждений.

Значит, второе утверждение из 3 строки верное. Числа a, b и c – простые.

Рассмотрим утверждение: $abc=48$. Разложим 48 на простые множители.

$48 = 2^4 \cdot 3$.

Видим, что 48 не представимо в виде произведения трёх простых чисел. Тогда это утверждение неверно. Значит, $a + b + c = 22$ – верное утверждение.

Сумма трёх чисел равна чётному числу, тогда все три числа не могут быть нечётными. Значит, среди наших простых чисел есть чётное. А это только число 2.

Утверждение: наименьшее из чисел равно 5 – неверно т.к. среди наших чисел заведомо есть двойка. Тогда наибольшее число равно 13.

Нашли уже два из трёх чисел: 2 и 13. Из утверждения:$a + b + c = 22$, находим, что среднее число равно 7.

Ответ: $2, 7, 13$.

Вариант 3 задания №4

Учитель написал по два утверждения про натуральные числа a, b, c на доску в три строки:

1 строка: 1) $a + b + c = 14$, 2) $abc = 60$;

2 строка: 1) наибольшее число равно 7, 2) наименьшее из чисел равно 3;

3 строка: 1) $a = b = c$, 2) числа a, b и c — простые.

Известно, что в каждой строке одно утверждение верное, одно – неверное. Найдите числа a, b, c.

Решение:

Рассмотрим первое утверждение в последней строке: $a = b = c$. Заметим, что оно противоречит первому утверждению из первой строки: $a + b + c = 14$ т.к. сумма равных чисел должна делится на 3. Также, оно противоречит второму утверждению из первой строки: $abc = 60$ т.к. произведение трёх равных чисел должно быть кубом натурального числа. Тогда утверждение: $a = b = c$ не может быть верным т.к. противоречит одному из верных утверждений.

Значит, второе утверждение из 3 строки верное. Числа a, b и c – простые.

Рассмотрим утверждение: $abc = 60$. Разложим 60 на простые множители.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Видим, что 60 не представимо в виде произведения трёх простых чисел. Тогда это утверждение неверно. Значит, $a + b + c = 14$ – верное утверждение.

Сумма трёх чисел равна чётному числу, тогда все три числа не могут быть нечётными. Значит, среди наших простых чисел есть чётное. А это только число 2.

Утверждение: наименьшее из чисел равно 3 – неверно т.к. среди наших чисел заведомо есть двойка. Тогда наибольшее число равно 7.

Нашли уже два из трёх чисел: 2 и 7. Из утверждения:$a + b + c = 14$, находим, что среднее число равно 5.

Ответ: $2, 5, 7$.

Вариант 4 задания №4

Учитель написал по два утверждения про натуральные числа a, b, c на доску в три строки:

1 строка: 1) $a + b + c = 20$, 2) $abc = 56$;

2 строка: 1) наибольшее число равно 13, 2) наименьшее из чисел равно 3;

3 строка: 1) $a = b = c$, 2) числа a, b и c — простые.

Известно, что в каждой строке одно утверждение верное, одно – неверное. Найдите числа a, b, c.

Решение:

Рассмотрим первое утверждение в последней строке: $a = b = c$. Заметим, что оно противоречит первому утверждению из первой строки: $a + b + c = 20$ т.к. сумма равных чисел должна делится на 3. Также, оно противоречит второму утверждению из первой строки: $abc = 56$ т.к. произведение трёх равных чисел должно быть кубом натурального числа. Тогда утверждение: $a = b = c$ не может быть верным т.к. противоречит одному из верных утверждений.

Значит, второе утверждение из 3 строки верное. Числа a, b и c – простые.

Рассмотрим утверждение: $abc = 56$. Разложим 56 на простые множители.

$56 = 2^3 \cdot 7$.

Видим, что 56 не представимо в виде произведения трёх простых чисел. Тогда это утверждение неверно. Значит, $a + b + c = 20$ – верное утверждение.

Сумма трёх чисел равна чётному числу, тогда все три числа не могут быть нечётными. Значит, среди наших простых чисел есть чётное. А это только число 2.

Утверждение: наименьшее из чисел равно 3 – неверно т.к. среди наших чисел заведомо есть двойка. Тогда наибольшее число равно 13.

Нашли уже два из трёх чисел: 2 и 13. Из утверждения:$a + b + c = 20$, находим, что среднее число равно 5.

Ответ: $2, 5, 13$.

Вариант 5 задания №4

Учитель написал по два утверждения про натуральные числа a, b, c на доску в три строки:

1 строка: 1) $a + b + c = 26$, 2) $abc = 60$;

2 строка: 1) наибольшее число равно 13, 2) наименьшее из чисел равно 5;

3 строка: 1) $a = b = c$, 2) числа a, b и c — простые.

Известно, что в каждой строке одно утверждение верное, одно – неверное. Найдите числа a, b, c.

Решение:

Рассмотрим первое утверждение в последней строке: $a = b = c$. Заметим, что оно противоречит первому утверждению из первой строки: $a + b + c = 26$ т.к. сумма равных чисел должна делится на 3. Также, оно противоречит второму утверждению из первой строки: $abc = 60$ т.к. произведение трёх равных чисел должно быть кубом натурального числа. Тогда утверждение: $a = b = c$ не может быть верным т.к. противоречит одному из верных утверждений.

Значит, второе утверждение из 3 строки верное. Числа a, b и c – простые.

Рассмотрим утверждение: $abc = 60$. Разложим 60 на простые множители.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Видим, что 60 не представимо в виде произведения трёх простых чисел. Тогда это утверждение неверно. Значит, $a + b + c = 26$ – верное утверждение.

Сумма трёх чисел равна чётному числу, тогда все три числа не могут быть нечётными. Значит, среди наших простых чисел есть чётное. А это только число 2.

Утверждение: наименьшее из чисел равно 5 – неверно т.к. среди наших чисел заведомо есть двойка. Тогда наибольшее число равно 13.

Нашли уже два из трёх чисел: 2 и 13. Из утверждения:$a + b + c = 26$, находим, что среднее число равно 11.

Ответ: $2, 11, 13$.

Задание №5 из 8 (8 кл). Мосты в городе N

Вариант 1 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 6, либо 7 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова, у которых выходит одинаковое число мостов, не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 6 мостами, 2 группа – острова с 7 мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 7, а во второй – 6. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 13 островов

Вариант 2 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 6, либо 9 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова, у которых выходит одинаковое число мостов, не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 6 мостами, 2 группа – острова с 9 мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количетсво городов в 1 группе – 9, а во второй – 6. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 15 островов

Вариант 3 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 5, либо 8 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова, у которых выходит одинаковое число мостов, не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 5 мостами, 2 группа – острова с 8 мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 8, а во второй – 5. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 13 островов

Вариант 4 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 10, либо 11 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова, у которых выходит одинаковое число мостов, не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 10 мостами, 2 группа – острова с 11 мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 11, а во второй – 10. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 21 остров

Вариант 5 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 10, либо 8 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова, у которых выходит одинаковое число мостов, не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 10ю мостами, 2 группа – острова с 8ю мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количетсво городов в 1 группе – 8, а во второй – 10. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соеденён со всеми городами другой.

Ответ: 18 островов

Задание №6 из 8 (8 кл). Рыцари и лжецы

Вариант 1 задания №6

На острове дружно живут 20 аборигенов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый абориген сказал: «Среди всех моих соседей ровно 6 несовершеннолетних.» Сколько лжецов может быть на острове? В ответ запишите сумму всех возможных вариантов ответа.

Решение:

Заметим, что все жители острова могут быть лжецами. Например, если среди них нет несовершеннолетних. А вот рыцарями все быть не могут т.к. среди соседей совершеннолетнего и несовершеннолетнего разное количество совершеннолетних. В любом другом случае, на острове есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

По условию все жители острова разделены на 2 группы: совершеннолетние и несовершеннолетние. Докажем, что никакие рыцарь и лжец не могут принадлежать одной группе.

Пусть это так, тогда среди оставшихся жителей одинаковое количество несовершеннолетних, как для рыцаря, так и для лжеца. Значит, они либо оба врут, либо оба говорят правду, что невозможно. Тогда группы совершеннолетних и несовершеннолетних - это и есть группы рыцарей и лжецов. Правда мы не знаем, кто есть кто. Пусть рыцари - совершеннолетние, тогда всего 6 несовершеннолетних т.е. 6 лжецов. Каждый из которых действительно врёт т.к. среди соседей лжеца ровно 5 несовершеннолетних.

Пусть рыцари - несовершеннолетние, тогда всего 7 несовершеннолетних (включая того рыцаря, который говорит про своих соседей). Значит, всего 7 рыцарей и 13 лжецов. Каждый лжец имеет по 7 несовершеннолетних соседей т.е. врёт.

Ответ: 39

Вариант 2 задания №6

На острове дружно живут 30 аборигенов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый абориген сказал: «Среди всех моих соседей ровно 7 несовершеннолетних.» Сколько лжецов может быть на острове? В ответ запишите сумму всех возможных вариантов ответа.

Решение:

Заметим, что все жители острова могут быть лжецами. Например, если среди них нет несовершеннолетних. А вот рыцарями все быть не могут т.к. среди соседей совершеннолетнего и несовершеннолетнего разное количество совершеннолетних. В любом другом случае, на острове есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

По условию все жители острова разделены на 2 группы: совершеннолетние и несовершеннолетние. Докажем, что никакие рыцарь и лжец не могут принадлежать одной группе.

Пусть это так, тогда среди оставшихся жителей одинаковое количество несовершеннолетних, как для рыцаря, так и для лжеца. Значит, они либо оба врут, либо оба говорят правду, что невозможно. Тогда группы совершеннолетних и несовершеннолетних - это и есть группы рыцарей и лжецов. Правда мы не знаем, кто есть кто.

Пусть рыцари - совершеннолетние, тогда всего 7 несовершеннолетних т.е. 7 лжецов. Каждый из которых действительно врёт т.к. среди соседей лжеца ровно 6 несовершеннолетних.

Пусть рыцари - несовершеннолетние, тогда всего 8 несовершеннолетних (включая того рыцаря, который говорит про своих соседей). Значит, всего 8 рыцарей и 22 лжеца. Каждый лжец имеет по 8 несовершеннолетних соседей т.е. врёт.

Ответ: 59

Вариант 3 задания №6

На острове дружно живут 40 аборигенов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый абориген сказал: «Среди всех моих соседей ровно 8 несовершеннолетних.» Сколько лжецов может быть на острове? В ответ запишите сумму всех возможных вариантов ответа.

Решение:

Заметим, что все жители острова могут быть лжецами. Например, если среди них нет несовершеннолетних. А вот рыцарями все быть не могут т.к. среди соседей совершеннолетнего и несовершеннолетнего разное количество совершеннолетних. В любом другом случае, на острове есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

По условию все жители острова разделены на 2 группы: совершеннолетние и несовершеннолетние. Докажем, что никакие рыцарь и лжец не могут принадлежать одной группе.

Пусть это так, тогда среди оставшихся жителей одинаковое количество несовершеннолетних, как для рыцаря, так и для лжеца. Значит, они либо оба врут, либо оба говорят правду, что невозможно. Тогда группы совершеннолетних и несовершеннолетних - это и есть группы рыцарей и лжецов. Правда мы не знаем, кто есть кто.

Пусть рыцари - совершеннолетние, тогда всего 8 несовершеннолетних т.е. 8 лжецов. Каждый из которых действительно врёт т.к. среди соседей лжеца ровно 7 несовершеннолетних.

Пусть рыцари - несовершеннолетние, тогда всего 9 несовершеннолетних (включая того рыцаря, который говорит про своих соседей). Значит, всего 9 рыцарей и 31 лжец. Каждый лжец имеет по 9 несовершеннолетних соседей т.е. врёт.

Ответ: 79

Вариант 4 задания №6

На острове дружно живут 50 аборигенов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый абориген сказал: «Среди всех моих соседей ровно 9 несовершеннолетних.» Сколько лжецов может быть на острове? В ответ запишите сумму всех возможных вариантов ответа.

Решение:

Заметим, что все жители острова могут быть лжецами. Например, если среди них нет несовершеннолетних. А вот рыцарями все быть не могут т.к. среди соседей совершеннолетнего и несовершеннолетнего разное количество совершеннолетних. В любом другом случае, на острове есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

По условию все жители острова разделены на 2 группы: совершеннолетние и несовершеннолетние. Докажем, что никакие рыцарь и лжец не могут принадлежать одной группе.

Пусть это так, тогда среди оставшихся жителей одинаковое количество несовершеннолетних, как для рыцаря, так и для лжеца. Значит, они либо оба врут, либо оба говорят правду, что невозможно.

Тогда группы совершеннолетних и несовершеннолетних - это и есть группы рыцарей и лжецов. Правда мы не знаем, кто есть кто.

Пусть рыцари - совершеннолетние, тогда всего 9 несовершеннолетних т.е. 9 лжецов. Каждый из которых действительно врёт т.к. среди соседей лжеца ровно 8 несовершеннолетних.

Пусть рыцари - несовершеннолетние, тогда всего 10 несовершеннолетних (включая того рыцаря, который говорит про своих соседей). Значит, всего 10 рыцарей и 40 лжецов. Каждый лжец имеет по 9 несовершеннолетних соседей т.е. врёт.

Ответ: 99

Вариант 5 задания №6

На острове дружно живут 60 аборигенов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый абориген сказал: «Среди всех моих соседей ровно 10 несовершеннолетних.» Сколько лжецов может быть на острове? В ответ запишите сумму всех возможных вариантов ответа.

Решение:

Заметим, что все жители острова могут быть лжецами. Например, если среди них нет несовершеннолетних. А вот рыцарями все быть не могут т.к. среди соседей совершеннолетнего и несовершеннолетнего разное количество совершеннолетних. В любом другом случае, на острове есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

По условию все жители острова разделены на 2 группы: совершеннолетние и несовершеннолетние. Докажем, что никакие рыцарь и лжец не могут принадлежать одной группе.

Пусть это так, тогда среди оставшихся жителей одинаковое количество несовершеннолетних, как для рыцаря, так и для лжеца. Значит, они либо оба врут, либо оба говорят правду, что невозможно. Тогда группы совершеннолетних и несовершеннолетних - это и есть группы рыцарей и лжецов. Правда мы не знаем, кто есть кто.

Пусть рыцари - совершеннолетние, тогда всего 10 несовершеннолетних т.е. 10 лжецов. Каждый из которых действительно врёт т.к. среди соседей лжеца ровно 9 несовершеннолетних.

Пусть рыцари - несовершеннолетние, тогда всего 11 несовершеннолетних (включая того рыцаря, который говорит про своих соседей). Значит, всего 11 рыцарей и 49 лжецов. Каждый лжец имеет по 11 несовершеннолетних соседей т.е. врёт.

Ответ: 119

Задание №7 из 8 (8 кл). Линейная функция и четырёхугольник

Вариант 1 задания №7

Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырёхугольника, ограниченной графиками функций $y_1 = \frac{1}{3}x, y_2 = 2x - 10, y_3 = 2x, y_4 = \frac{1}{3}x + 5$.

Решение:

Получившийся четырёхугольник – параллелограмм. Так как графики прямых противоположных сторон – параллельные прямые (угловые коэффициенты совпадают).

Тогда точка пересечения диагоналей – середина любой из диагоналей. Найдём координаты двух противоположных точек.

1) $\frac{1}{3}x = 2x - 10,\ x = 6, y = 2.$

2) $2x = \frac{1}{3}x + 5,\ x = 3, y = 6.$

Тогда середина отрезка есть точка $(4,5; 4)$.

Ответ: $(4,5;4)$

Вариант 2 задания №7

Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырёхугольника, ограниченной графиками функций $y_1 = \frac{1}{3}x, y_2 = 2x - 5, y_3 = 2x, y_4 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Решение:

Получившийся четырёхугольник – параллелограмм. Так как графики прямых противоположных сторон – параллельные прямые (угловые коэффициенты совпадают).

Тогда точка пересечения диагоналей – середина любой из диагоналей. Найдём координаты двух противоположных точек.

1) $\frac{1}{3}x = 2x - 5,\ x = 3, y = 1.$

2) $2x = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3},\ x = 1, y = 2.$

Тогда середина отрезка есть точка $(2; 1,5)$.

Ответ: $(2;1,5)$

Вариант 3 задания №7

Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырёхугольника, ограниченной графиками функций $y_1 = \frac{1}{2}x, y_2 = -3x, y_3 = -3x + 14, y_4 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Решение:

Получившийся четырёхугольник – параллелограмм. Так как графики прямых противоположных сторон – параллельные прямые (угловые коэффициенты совпадают).

Тогда точка пересечения диагоналей – середина любой из диагоналей. Найдём координаты двух противоположных точек.

1) $\frac{1}{2}x = -3x,\ x = 0, y = 0.$

2) $-3x + 14 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2},\ x = 5, y = -1.$

Тогда середина отрезка есть точка $(2.5; -0.5)$.

Ответ: $(2,5;-0,5)$

Вариант 4 задания №7

Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырёхугольника, ограниченной графиками функций $y_1 = -\frac{1}{3}x, y_2 = -2x + 10, y_3 = -2x, y_4 = -\frac{1}{3}x - 5$

Решение:

Получившийся четырёхугольник – параллелограмм. Так как графики прямых противоположных сторон – параллельные прямые (угловые коэффициенты совпадают).

Тогда точка пересечения диагоналей – середина любой из диагоналей. Найдём координаты двух противоположных точек.

1) $-\frac{1}{3}x = -2x + 10,\ x = 6, y = -2.$

2) $-2x = -\frac{1}{3}x - 5,\ x = 3, y = -6.$

Тогда середина отрезка есть точка $(4,5; -4)$.

Ответ: $(4,5; -4)$

Вариант 5 задания №7

Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырёхугольника, ограниченной графиками функций $y_1 = -\frac{1}{2}x, y_2 = 3x, y_3 = 3x - 14, y_4 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Решение:

Получившийся четырёхугольник – параллелограмм. Так как графики прямых противоположных сторон – параллельные прямые (угловые коэффициенты совпадают).

Тогда точка пересечения диагоналей – середина любой из диагоналей. Найдём координаты двух противоположных точек.

1) $-\frac{1}{2}x = 3x,\ x = 0, y = 0.$

2) $3x - 14 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2},\ x = 5, y = -1.$

Тогда середина отрезка есть точка $(2.5; -0.5)$.

Ответ: $(2,5; 0,5)$

Задание №8 из 8 (8 кл). Особые множители

Вариант 1 задания №8

Для натуральных чисел a и b известно, что $2a+5b$ делится нацело на 101, ab также делится нацело на 101. Чему равно наименьшее значение $3a+2b$?

Решение:

Заметим, что 101 – простое, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 101, то одно из чисел должно делиться на 101. Значит одно из слагаемых в сумме $2a+5b$ делится на 101, и сама сумма делится на 101, тогда и другое слагаемое делится на 101. Так как ни 2, ни 5 не делятся на 101, получаем, что и второе число должно нацело делиться на 101.
Тогда каждое из них минимум 101. Отсюда наименьшее значение равно $3a+2b=5\cdot 101=505$. Осталось заметить, что при $a=b=101$ условие выполняется.

Ответ: 505

Вариант 2 задания №8

Для натуральных чисел a и b известно, что $2a+7b$ делится нацело на 89, ab также делится нацело на 89. Чему равно наименьшее значение $3a+2b$?

Решение:

Заметим, что 89 – простое, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 89, то одно из чисел должно делиться на 89. Значит одно из слагаемых в сумме $2a+7b$ делится на 89, и сама сумма делится на 89, тогда и другое слагаемое делится на 89. Так как ни 2, ни 7 не делятся на 89, получаем, что и второе число должно нацело делиться на 89.
Тогда каждое из них минимум 89. Отсюда наименьшее значение равно $3a+2b=5\cdot 89=445$. Осталось заметить, что при $a=b=89$ условие выполняется.

Ответ: 445

Вариант 3 задания №8

Для натуральных чисел a и b известно, что $4a+11b$ делится нацело на 103, ab также делится нацело на 103. Чему равно наименьшее значение $6a+b$?

Решение:

Заметим, что 103 – простое, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 103, то одно из чисел должно делиться на 103. Значит одно из слагаемых в сумме $4a+11b$ делится на 103, и сама сумма делится на 103, тогда и другое слагаемое делится на 103. Так как ни 4, ни 11 не делятся на 103, получаем, что и второе число должно нацело делиться на 103.
Тогда каждое из них минимум 103. Отсюда наименьшее значение равно $6a+b=7\cdot 103=721$. Осталось заметить, что при $a=b=103$ условие выполняется.

Ответ: 721

Вариант 4 задания №8

Для натуральных чисел a и b известно, что $3a+4b$ делится нацело на 107, ab также делится нацело на 107. Чему равно наименьшее значение $3a+5b$?

Решение:

Заметим, что 107 – простое, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 107, то одно из чисел должно делиться на 107. Значит одно из слагаемых в сумме $3a+4b$ делится на 107, и сама сумма делится на 107, тогда и другое слагаемое делится на 107. Так как ни 3, ни 4 не делятся на 107, получаем, что и второе число должно нацело делиться на 107.
Тогда каждое из них минимум 107. Отсюда наименьшее значение равно $3a+5b=8\cdot 107=856$. Осталось заметить, что при $a=b=107$ условие выполняется.

Ответ: 856

Вариант 5 задания №8

Для натуральных чисел a и b известно, что $2a+7b$ делится нацело на 113, ab также делится нацело на 113. Чему равно наименьшее значение $4a+2b$?

Решение:

Заметим, что 113 – простое, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 113, то одно из чисел должно делиться на 113. Значит одно из слагаемых в сумме $2a+7b$ делится на 113, и сама сумма делится на 113, тогда и другое слагаемое делится на 113. Так как ни 2, ни 7 не делятся на 113, получаем, что и второе число должно нацело делиться на 113.
Тогда каждое из них минимум 113. Отсюда наименьшее значение равно $4a+2b=6\cdot 113=678$. Осталось заметить, что при $a=b=113$ условие выполняется.

Ответ: 678

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

8 заданий по 5 баллов

(максимум 40 баллов)

продолжительность 90 минут

Задание №1 из 8 (9 кл). Верные утверждения – 9

Вариант 1 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике биссектриса равна медиане, то он - равнобедренный.

б) В произвольном треугольнике всегда найдутся два угла, разность градусных мер которых не превосходит по модулю 60°.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 9, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные два результата сложить, то результат будет делиться на 9.

г) Минимальное четырехзначное число, записанное разными цифрами, которое делится на 6 - это 1236.

д) Значение в вершине любой квадратичной параболы всегда является наименьшим среди всех возможных значений.

Решение:

а) нет, неверно. Если биссектриса и медианы проведены из разных вершин, то треугольник не обязательно равнобедренный.

б) да, верно. Пусть это было бы неверно: возьмем самый меньший угол, тогда средний по величине как минимум на 60 градусов больше, а самый больший минимум на 120 градусов больше, так как он на 60 градусов больше среднего, но тогда сумма углов была бы не меньше суммы утроенного меньшего угла и 180 градусов, что противоречит сумме углов треугольника;

в) да, верно. Так как остаток при делении на 9 числа и суммы его цифр совпадает, то получается, раз сумма чисел делилась на 9 (остаток был равен 0 при делении на 9), то остаток от суммы суммы цифр будет также равен 0 при делении на 9;

г) нет, неверно. Число из условия - 1026. Заметим, что минимальное четырёхзначное число, записанное разными цифрами - 1023, но оно не делится на 6. 1024, 1025 также не делятся на 6, значит 1026 - минимальное число, записанное разными цифрами и делящееся на 6.

д) нет, неверно. У параболы ветвями вниз значение в вершине - наибольшее среди всех возможных значений.

Ответ: б,в

Вариант 2 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике медиана равна высоте, то он - равнобедренный.

б) Существует треугольник, в котором разность двух градусных мер углов равна 60°.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 5, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 5.

г) Минимальное пятизначное число, которое записано разными цифрами и делится нацело на 5 - это 12345.

д) Значение в вершине любой квадратичной параболы с ветвями вниз всегда является наибольшим среди всех возможных значений.

Решение:

а) нет, неверно. Возьмем прямоугольный треугольник с углом в 30 градусов. Катет, равный половине гипотенузе (напротив угла в 30 градусов) будем считать высотой и он равен медиане, проведенной к гипотенузе, при этом треугольник - не равнобедренный;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов;

в) нет, неверно. Контрпример числа 14 и 11: суммы цифр равны 5 и 2 и если их сложить, 7 не разделится на 5;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условия задачи, является 10235. Минимальным пятизначным числом с разными цифрами является 10234, но оно не делится на 5, следующее за ним число 10235 подходит под условия задачи;

д) да, верно. Теорема из школьного курса.

Ответ: б,д

Вариант 3 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если в треугольнике медиана совпадает с биссектрисой, то он - равнобедренный или равносторонний.

б) Существует треугольник, в котором один угол в 6 раз больше другого.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 7, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 7.

г) Минимальное пятизначное число, которое записано разными цифрами и делится на 4 - это 12348.

д) Значение в вершине любой квадратичной параболы с ветвями вверх всегда является наименьшим среди всех возможных значений.

Решение:

а) да, верно. Признак равнобедренности треугольника;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 10, 60 и 110 градусов;

в) нет, неверно. Контрпример числа 14 и 21: суммы цифр равны 5 и 3 и если их сложить, 8 не разделится на 7;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условие задачи является 10236. Минимальным пятизначным числом с разными цифрами является 10234, но оно не делится на 4, следующее за ним число 10235 также не делится на 4, а 10236 подходит под условия задачи;

д) да, верно. Теорема из школьного курса.

Ответ: а,б,д

Вариант 4 задания №1

Выберите верные утверждения:

а) Если центр описанной окружности лежит на медиане, то такой треугольник всегда равнобедренный или равносторонний.

б) В любом треугольнике градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.

в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 3, то если посчитать сумму

цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 3.
г) Минимальное четырехзначное число, записанное разными цифрами и делится нацело на 4 - это 1236.
д) Значение в вершине любой квадратичной параболы всегда является наибольшим среди всех возможных значений.

Решение:

а) нет, неверно. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на медиане, но треугольник не обязательно равнобедренный;

б) нет, неверно. В равностороннем треугольнике все углы равны и нет пары углов, отличающихся хотя бы на 30 градусов;

в) да, верно. Так как остаток при делении на 3 числа и суммы его цифр совпадает, то получается, раз сумма чисел делилась на 3 (остаток был равен 0 при делении на 3), то остаток от суммы суммы цифр будет также равен 0 при делении на 3;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условие задачи является 1024. Минимальным четырёхзначным числом с разными цифрами является 1023, но оно не делится на 4, следующее за ним число 1024 подходит под условия задачи;

д) нет, неверно. У параболы ветвями вверх значение в вершине не является наибольшим среди всех возможных.

Ответ: в

Вариант 5 задания №1

Выберите верные утверждения:
а) Если в треугольнике центр вписанной окружности лежит на медиане, то треугольник - равнобедренный или равносторонний.
б) Существует треугольник, в котором градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.
в) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 4, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 4.
г) Минимальное пятизначное число, записанное разными цифрами и делится нацело на 3 - это 12345.
д) Значение в вершине любой квадратичной параболы всегда отрицательное.

Решение:

а) да, верно. В таком треугольнике биссектриса совпадает с медианой (центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис), значит, по признаку равнобедренности треугольника, в треугольник е есть хотя бы две равные стороны;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 10, 50 и 120 градусов;

в) нет, неверно. Контрпример: числа 12 и 16, их суммы цифр равны 3 и 7 соответственно, если их сложить получится 10, которое не делится на 4;

г) нет, неверно. Минимальным числом, подходящим под условие задачи является 10236. Минимальным пятизначным числом с разными цифрами является 10234, но оно не делится на 3, следующее за ним число 10235 также не делится на 3, а 10236 подходит под условия задачи;

д) нет, неверно. Возьмем квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + 2x + 7$. Значение в его вершине $x = -1$ - положительное число.

Ответ: а,б

Задание №2 из 8 (9 кл). В целых числах

Вариант 1 задания №2

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 30$? Напомним, что решением уравнения считается пара чисел, то есть сколько пар чисел удовлетворяет уравнению?

Решение:

Разложим выражение на множители, по формуле разности квадратов, получим $(x-y)(x+y) = 30$. Заметим, что числа $(x - y)$ и $(x + y)$ – одной чётности т.к. их сумма равна $2x$ т.е. чётному числу. Произведение двух скобок – чётное число, значит одна из них – чётная, тогда и другая – чётная. Тогда произведение двух скобок должно делится на 4, но 30 не делится на 4. Значит целых решений уравнения нет.

Ответ: 0

Вариант 2 задания №2

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 42$? Напомним, что решением уравнения считается пара чисел, то есть сколько пар чисел удовлетворяет уравнению?

Решение:

Разложим выражение на множители, по формуле разности квадратов, получим $(x-y)(x+y) = 42$. Заметим, что числа $(x - y)$ и $(x + y)$ – одной чётности т.к. их сумма равна $2x$ т.е. чётному числу. Произведение двух скобок – чётное число, значит одна из них – чётная, тогда и другая – чётная. Тогда произведение двух скобок должно делится на 4, но 42 не делится на 4. Значит целых решений уравнения нет.

Ответ: 0

Вариант 3 задания №2

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 70$? Напомним, что решением уравнения считается пара чисел, то есть сколько пар чисел удовлетворяет уравнению?

Решение:

Разложим выражение на множители, по формуле разности квадратов, получим $(x-y)(x+y) = 70$. Заметим, что числа $(x - y)$ и $(x + y)$ – одной чётности т.к. их сумма равна $2x$ т.е. чётному числу. Произведение двух скобок – чётное число, значит одна из них – чётная, тогда и другая – чётная. Тогда произведение двух скобок должно делится на 4, но 70 не делится на 4. Значит целых решений уравнения нет.

Ответ: 0

Вариант 4 задания №2

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 110$? Напомним, что решением уравнения считается пара чисел, то есть сколько пар чисел удовлетворяет уравнению?

Решение:

Разложим выражение на множители, по формуле разности квадратов, получим $(x-y)(x+y) = 110$. Заметим, что числа $(x-y)$ и $(x+y)$ – одной чётности т.к. их сумма равна $2x$ т.е. чётному числу. Произведение двух скобок – чётное число, значит одна из них – чётная, тогда и другая – чётная. Тогда произведение двух скобок должно делится на 4, но 110 не делится на 4. Значит целых решений уравнения нет.

Ответ: 0

Вариант 5 задания №2

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 66$? Напомним, что решением уравнения считается пара чисел, то есть сколько пар чисел удовлетворяет уравнению?

Решение:

Разложим выражение на множители, по формуле разности квадратов, получим $(x-y)(x+y) = 66$. Заметим, что числа $(x-y)$ и $(x+y)$ – одной чётности т.к. их сумма равна $2x$ т.е. чётному числу. Произведение двух скобок – чётное число, значит одна из них – чётная, тогда и другая – чётная. Тогда произведение двух скобок должно делится на 4, но 66 не делится на 4. Значит целых решений уравнения нет.

Ответ: 0

Задание №3 из 8 (9 кл). Петя и числа

Вариант 1 задания №3

Петя написал числа 1, 2, 5, 7 в круг. Затем между каждыми двумя числами он вписал их сумму и проделал эту операцию 5 раз. Вычислите сумму всех чисел после пятой операции.

Решение:

Заметим, что после каждой операции сумма записанных чисел утраивается. Действительно, каждое из ранее написанных чисел будет входить в число слева и справа от него. Значит каждое число будет учитываться ровно 3 раза в новой сумме. Изначальная сумма равна $1+2+5+7=15$. Тогда после 5 операций она станет равна $15 \cdot 3^5 = 3645$.

Ответ: 3645

Вариант 2 задания №3

Петя написал числа 1, 3, 5, 7 в круг. Затем между каждыми двумя числами он вписал их сумму и проделал эту операцию 5 раз. Вычислите сумму всех чисел после пятой операции.

Решение:

Заметим, что после каждой операции сумма записанных чисел утраивается. Действительно, каждое из ранее написанных чисел будет входить в число слева и справа от него. Значит каждое число будет учитываться ровно 3 раза в новой сумме. Изначальная сумма равна $1+3+5+7=16$. Тогда после 5 операций она станет равна $16 \cdot 3^5 = 3888$.

Ответ: 3888

Вариант 3 задания №3

Петя написал числа 1, 3, 6, 7 в круг. Затем между каждыми двумя числами он вписал их сумму и проделал эту операцию 5 раз. Вычислите сумму всех чисел после пятой операции.

Решение:

Заметим, что после каждой операции сумма записанных чисел утраивается. Действительно, каждое из ранее написанных чисел будет входить в число слева и справа от него. Значит каждое число будет учитываться ровно 3 раза в новой сумме. Изначальная сумма равна $1+3+6+7=17$. Тогда после 5 операций она станет равна $17 \cdot 3^5 = 4131$.

Ответ: 4131

Вариант 4 задания №3

Петя написал числа 1, 2, 6, 7 в круг. Затем между каждыми двумя числами он вписал их сумму и проделал эту операцию 5 раз. Вычислите сумму всех чисел после пятой операции.

Решение:

Заметим, что после каждой операции сумма записанных чисел утраивается. Действительно, каждое из ранее написанных чисел будет входить в число слева и справа от него. Значит каждое число будет учитываться ровно 3 раза в новой сумме. Изначальная сумма равна $1 + 2 + 6 + 7 = 16$. Тогда после 5 операций она станет равна $16 \cdot 3^5 = 3888$.

Ответ: 3888

Вариант 5 задания №3

Петя написал числа 1, 2, 5, 9 в круг. Затем между каждыми двумя числами он вписал их сумму и проделал эту операцию 5 раз. Вычислите сумму всех чисел после пятой операции.

Решение:

Заметим, что после каждой операции сумма записанных чисел утраивается. Действительно, каждое из ранее написанных чисел будет входить в число слева и справа от него. Значит каждое число будет учитываться ровно 3 раза в новой сумме. Изначальная сумма равна $1 + 2 + 5 + 9 = 17$. Тогда после 5 операций она станет равна $17 \cdot 3^5 = 4131$.

Ответ: 4131

Задание №4 из 8 (9 кл). Хоккей

Вариант 1 задания №4

$ABCD$ – прямоугольная хоккейная площадка с бортом по периметру. Шайба (точка) находится на стороне AB на расстоянии 1 от точки A. Требуется ударить по шайбе так, чтобы она ударилась в некоторую точку X на стороне BC. Затем, отскочив, ударилась о борт CD, после чего попала точно в середину стороны AD. Все «отскоки» происходят по принципу «угол падения равен углу отражения», а лёд на площадке идеально гладкий. Найти длину отрезка BX, если известно, что $AB = 5$, $AD = 9$.

Решение:

Обозначим точку отскока на стороне CD за Y, точку отскока на стороне AD за Z, начальную точку на стороне AB за W, отрезок CY за y, отрезок BX за x.

Так как $\angle BXW = \angle CXY$, то $\Delta BXW \sim \Delta CXY$. Аналогично, $\Delta CXY \sim \Delta YDZ$. Значит все три треугольника подобны.

Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta CXY$, имеем $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{CY}{BW}$. Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta YDZ$, имеем $\dfrac{YD}{BW} = \dfrac{DZ}{BX}$. Перепишем наши равенства, выразим отрезки через x, y и данные нам стороны. Получаем,

$$\frac{9-x}{x} = \frac{y}{4}, \quad \frac{5-y}{4} = \frac{9}{2x}.$$

Выразим y из первого равенства и подставим во второе, получаем:

$$\frac{5-4(9-x)/x}{4} = \frac{9x-36}{4x} = \frac{9}{2x}.$$

Из последнего равенства находим $x = 6$.

Ответ: 6

Вариант 2 задания №4

$ABCD$ – прямоугольная хоккейная площадка с бортом по периметру. Шайба (точка) находится на стороне AB на расстоянии 1 от точки A. Требуется ударить по шайбе так, чтобы она ударилась в некоторую точку X на стороне BC. Затем, отскочив, ударилась о борт CD, после чего попала точно в середину стороны AD. Все «отскоки» происходят по принципу «угол падения равен углу отражения», а лёд на площадке идеально гладкий. Найти длину отрезка BX, если известно, что $AB = 7$, $AD = 13$.

Решение:

Обозначим точку отскока на стороне CD за Y, точку отскока на стороне AD за Z, начальную точку на стороне AB за W, отрезок CY за y, отрезок BX за x.

Так как $\angle BXW = \angle CXY$, то $\Delta BXW \sim \Delta CXY$. Аналогично, $\Delta CXY \sim \Delta YDZ$. Значит все три треугольника подобны.

Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta CXY$, имеем $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{CY}{BW}$. Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta YDZ$, имеем $\dfrac{YD}{BW} = \dfrac{DZ}{BX}$.

Перепишем наши равенства, выразим отрезки через x, y и данные нам стороны. Получаем,

$$\frac{13-x}{x} = \frac{y}{6}, \quad \frac{7-y}{6} = \frac{13}{2x}.$$

Выразим y из первого равенства и подставим во второе, получаем:

$$\frac{7-6(13-x)/x}{6} = \frac{13x-78}{6x} = \frac{13}{2x}.$$

Из последнего равенства находим $x = 9$.

Ответ: 9

Вариант 3 задания №4

$ABCD$ – прямоугольная хоккейная площадка с бортом по периметру. Шайба (точка) находится на стороне AB на расстоянии 1 от точки A. Требуется ударить по шайбе так, чтобы она ударилась в некоторую точку X на стороне BC. Затем, отскочив, ударилась о борт CD, после чего попала точно в середину стороны AD. Все «отскоки» происходят по принципу «угол падения равен углу отражения», а лёд на площадке идеально гладкий. Найти длину отрезка BX, если известно, что $AB = 9$, $AD = 17$.

Решение:

Обозначим точку отскока на стороне CD за Y, точку отскока на стороне AD за Z, начальную точку на стороне AB за W, отрезок CY за y, отрезок BX за x.

Так как $\angle BXW = \angle CXY$, то $\Delta BXW \sim \Delta CXY$. Аналогично, $\Delta CXY \sim \Delta YDZ$. Значит все три треугольника подобны.

Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta CXY$, имеем $\frac{CX}{BX} = \frac{CY}{BW}$. Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta YDZ$, имеем $\frac{YD}{BW} = \frac{DZ}{BX}$. Перепишем наши равенства, выразим отрезки через x, y и данные нам стороны. Получаем,

$$\frac{17-x}{x} = \frac{y}{8}, \quad \frac{9-y}{8} = \frac{17}{2x}.$$

Выразим y из первого равенства и подставим во второе, получаем:

$$\frac{9-8(17-x)/x}{8} = \frac{17x-136}{8x} = \frac{17}{2x}.$$

Из последнего равенства находим $x = 12$.

Ответ: 12

Вариант 4 задания №4

$ABCD$ – прямоугольная хоккейная площадка с бортом по периметру. Шайба (точка) находится на стороне AB на расстоянии 1 от точки A. Требуется ударить по шайбе так, чтобы она ударилась в некоторую точку X на стороне BC. Затем, отскочив, ударилась о борт CD, после чего попала точно в середину стороны AD. Все «отскоки» происходят по принципу «угол падения равен углу отражения», а лёд на площадке идеально гладкий. Найти длину отрезка BX, если известно, что $AB = 11$, $AD = 21$.

Решение:

Обозначим точку отскока на стороне CD за Y, точку отскока на стороне AD за Z, начальную точку на стороне AB за W, отрезок CY за y, отрезок BX за x.

Так как $\angle BXW = \angle CXY$, то $\Delta BXW \sim \Delta CXY$. Аналогично, $\Delta CXY \sim \Delta YDZ$. Значит все три треугольника подобны.

Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta CXY$, имеем $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{CY}{BW}$. Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta YDZ$, имеем $\dfrac{YD}{BW} = \dfrac{DZ}{BX}$. Перепишем наши равенства, выразим отрезки через x, y и данные нам стороны. Получаем,

$$\frac{21-x}{x} = \frac{y}{10}, \quad \frac{11-y}{10} = \frac{21}{2x}.$$

Выразим y из первого равенства и подставим во второе, получаем:

$$\frac{11-10(21-x)/x}{10} = \frac{21x-210}{10x} = \frac{21}{2x}.$$

Из последнего равенства находим $x = 15$.

Ответ: 15

Вариант 5 задания №4

$ABCD$ – прямоугольная хоккейная площадка с бортом по периметру. Шайба (точка) находится на стороне AB на расстоянии 1 от точки A. Требуется ударить по шайбе так, чтобы она ударилась в некоторую точку X на стороне BC. Затем, отскочив, ударилась о борт CD, после чего попала точно в середину стороны AD. Все «отскоки» происходят по принципу «угол падения равен углу отражения», а лёд на площадке идеально гладкий. Найти длину отрезка BX, если известно, что $AB = 13$, $AD = 25$.

Решение:

Обозначим точку отскока на стороне CD за Y, точку отскока на стороне AD за Z, начальную точку на стороне AB за W, отрезок CY за y, отрезок BX за x.

Так как $\angle BXW = \angle CXY$, то $\Delta BXW \sim \Delta CXY$. Аналогично, $\Delta CXY \sim \Delta YDZ$. Значит все три треугольника подобны.

Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta CXY$, имеем $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{CY}{BW}$. Из подобия $\Delta BXW \sim \Delta YDZ$, имеем $\dfrac{YD}{BW} = \dfrac{DZ}{BX}$. Перепишем наши равенства, выразим отрезки через x, y и данные нам стороны. Получаем,

$$\frac{25-x}{x} = \frac{y}{12}, \quad \frac{13-y}{12} = \frac{25}{2x}.$$

Выразим y из первого равенства и подставим во второе, получаем:

$$\frac{13-12(25-x)/x}{12} = \frac{25x-300}{12x} = \frac{25}{2x}.$$

Из последнего равенства находим $x = 18$.

Ответ: 18

Задание №5 из 8 (9 кл). Мосты в городе N

Вариант 1 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 6, либо 7 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова у которых выходит одинаковое число мостов не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 6ю мостами, 2 группа – острова с 7ю мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 7, а во второй – 6. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 13 островов

Вариант 2 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 6, либо 9 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова у которых выходит одинаковое число мостов не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 6ю мостами, 2 группа – острова с 9ю мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 9, а во второй – 6. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 15 островов

Вариант 3 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 5, либо 8 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова у которых выходит одинаковое число мостов не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 5ю мостами, 2 группа – острова с 8ю мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 8, а во второй – 8. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 13 островов

Вариант 4 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 10, либо 11 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова у которых выходит одинаковое число мостов не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 10ю мостами, 2 группа – острова с 11ю мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 11, а во второй – 10. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 21 остров

Вариант 5 задания №5

В городе N, состоящем из островов, с каждого острова выходит либо 10, либо 8 мостов. Причём у любых двух островов, соединенных мостом, количество исходящих из него мостов разное. Из какого наименьшего количества островов может состоять город N?

Решение:

Из условия следует, что острова у которых выходит одинаковое число мостов не соединены друг с другом. Значит все острова можно разделить на 2 группы: 1 группа – острова с 10ю мостами, 2 группа – острова с 8ю мостами. Тогда все мосты проходят между первой и второй группой. Тогда минимальное количество городов в 1 группе – 8, а во второй – 10. Заметим, что такой вариант возможен, если каждый из городов одной группы соединён со всеми городами другой.

Ответ: 18 островов

Задание №6 из 8 (9 кл). Простые вычисления

Вариант 1 задания №6

Известно, что $\dfrac{a+b}{a-b}=3$. Вычислите $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-2b^2}$.

Решение:

Домножим левую и правую часть условия на $a-b$, получим: $a+b=3a-3b$. Тогда $2a=4b$. Заменяя a на $2b$ в искомой дроби получим $\frac{5b^2}{2b^2}=2,5$.

Ответ: 2,5

Вариант 2 задания №6

Известно, что $\dfrac{a+b}{a-b}=4$. Вычислите $\dfrac{a^2+2b^2}{a^2-3b^2}$.

Решение:

Домножим левую и правую часть условия на $a-b$, получим: $a+b=4a-4b$. Тогда $3a=5b$. Заменяя a на $\frac{5}{3}b$ в искомой дроби получим $\dfrac{43/9b^2}{-2/9b^2}=-21,5$.

Ответ: -21,5

Вариант 3 задания №6

Известно, что $\dfrac{a+b}{a-b}=5$. Вычислите $\dfrac{2a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

Решение:

Домножим левую и правую часть условия на $a-b$, получим: $a+b=5a-5b$. Тогда $4a=6b$. Заменяя a на $\frac{3}{2}b$ в искомой дроби получим $\dfrac{22/4b^2}{5/4b^2}=4,4$.

Ответ: 4,4

Вариант 4 задания №6

Известно, что $\dfrac{a+b}{a-b}=6.$. Вычислите $\dfrac{a^2+4b^2}{a^2-2b^2}$.

Решение:

Домножим левую и правую часть условия на $a-b$, получим: $a+b=6a-6b$. Тогда $5a=7b$. Заменяя a на $\frac{7}{5}b$ в искомой дроби получим $\dfrac{149/25b^2}{-1/25b^2}=-149$.

Ответ: -149

Вариант 5 задания №6

Известно, что $\dfrac{a+b}{a-b}=7.$. Вычислите $\dfrac{a^2+5b^2}{a^2-4b^2}$.

Решение:

Домножим левую и правую часть условия на $a-b$, получим: $a+b = 7a-7b$. Тогда $6a = 8b$. Заменяя a на $\frac{4}{3}b$ в искомой дроби получим $\dfrac{61/9b^2}{-20/9b^2} = -3,05$.

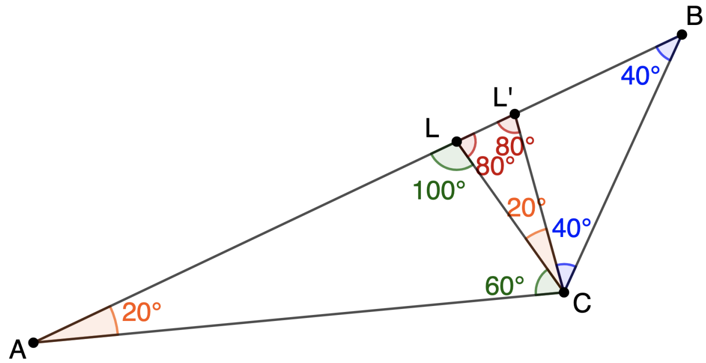
Ответ: -3,05

Задание №7 из 8 (9 кл). Необычный треугольник

Вариант 1 задания №7

Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На стороне AB взята точка L такая, что $\angle ALC = 100^\circ$. Найдите CL, если $AB - AC = 4$.

Решение:



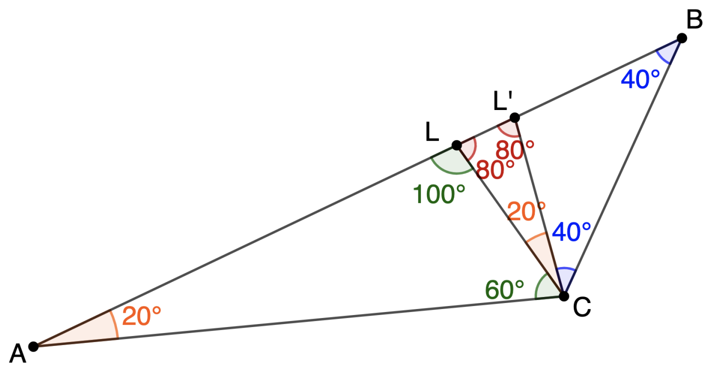
Заметим, что угол BCL равен 60° (внешний угол треугольника BCL равен сумме внутренних углов LBC и BCL). Отметим на стороне AB точку L' такую, что $\angle BCL' = 40^\circ$. Тогда в треугольнике $BL'C$ углы $L'BC$ и BCL' равны 40°, а значит, этот треугольник равнобедренный: $BL' = CL'$. Рассмотрим треугольник $L'CL$: $\angle L'CL = \angle BCL - \angle BCL' = 20^\circ$, $\angle CLL' = 180^\circ - \angle ALC = 80^\circ$ (смежные углы CLL' и ALC в сумме дают 180°), получаем, что $\angle LL'C = 80^\circ$ (по сумме углов треугольника) и $L'CL$ - равнобедренный, $CL' = CL$. Треугольник $L'AC$ - также равнобедренный ($\angle AL'C = 80^\circ, \angle CAL' = 20^\circ$), следовательно, $AC = AL'$. Тогда $AB - AC = L'B = L'C = CL = 4$.

Ответ: 4

Вариант 2 задания №7

Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На стороне AB взята точка L такая, что $\angle ALC = 100^\circ$. Найдите CL, если $AB - AC = 6$.

Решение:



Заметим, что угол BCL равен 60° (внешний угол треугольника BCL равен сумме внутренних углов LBC и BCL). Отметим на стороне AB точку L' такую, что $\angle BCL' = 40^\circ$. Тогда в треугольнике $BL'C$ углы $L'BC$ и BCL' равны 40°, а значит, этот треугольник равнобедренный: $BL' = CL'$. Рассмотрим треугольник $L'CL$: $\angle L'CL = \angle BCL - \angle BCL' = 20^\circ$, $\angle CLL' = 180^\circ - \angle ALC = 80^\circ$ (смежные углы CLL' и ALC в сумме дают 180°), получаем, что $\angle LL'C = 80^\circ$ (по сумме углов треугольника) и $L'CL$

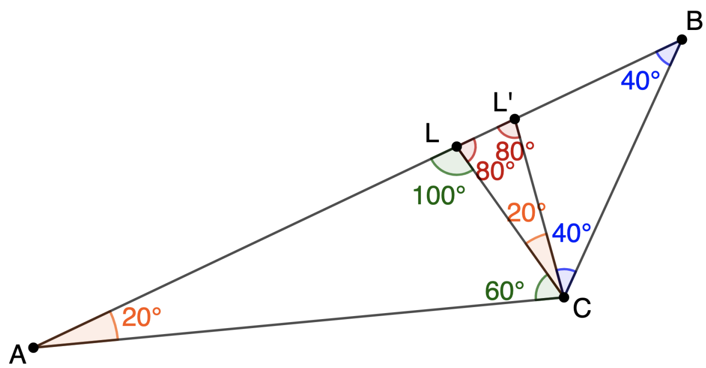
- равнобедренный, $CL' = CL$. Треугольник $L'AC$ - также равнобедренный ($\angle AL'C = 80°, \angle CAL' = 20°$), следовательно, $AC = AL'$. Тогда $AB - AC = L'B = L'C = CL = 6$.

Ответ: 6

Вариант 3 задания №7

Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$. На стороне AB взята точка L такая, что $\angle ALC = 100°$. Найдите CL, если $AB - AC = 3$.

Решение:



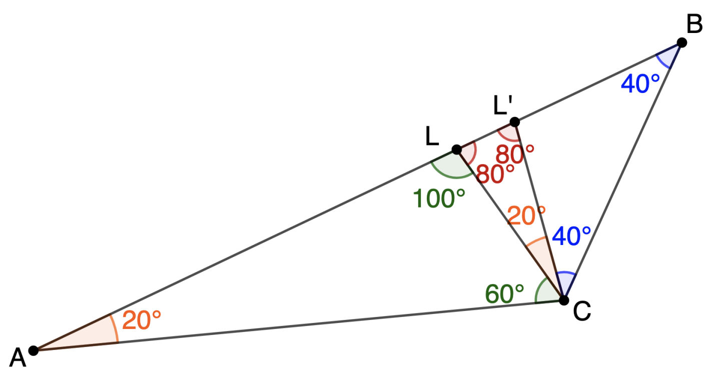
Заметим, что угол BCL равен $60°$ (внешний угол треугольника BCL равен сумме внутренних углов LBC и BCL). Отметим на стороне AB точку L' такую, что $\angle BCL' = 40°$. Тогда в треугольнике $BL'C$ углы $L'BC$ и BCL' равны $40°$, а значит, этот треугольник равнобедренный: $BL' = CL'$. Рассмотрим треугольник $L'CL$: $\angle L'CL = \angle BCL - \angle BCL' = 20°$, $\angle CLL' = 180° - \angle ALC = 80°$ (смежные углы CLL' и ALC в сумме дают $180°$), получаем, что $\angle LL'C = 80°$ (по сумме углов треугольника) и $L'CL$ - равнобедренный, $CL' = CL$. Треугольник $L'AC$ - также равнобедренный ($\angle AL'C = 80°, \angle CAL' = 20°$), следовательно, $AC = AL'$. Тогда $AB - AC = L'B = L'C = CL = 3$.

Ответ: 3

Вариант 4 задания №7

Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$. На стороне AB взята точка L такая, что $\angle ALC = 100°$. Найдите CL, если $AB - AC = 8$.

Решение:



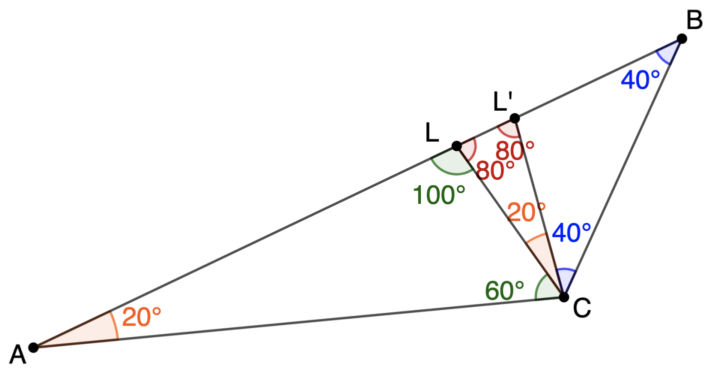
Заметим, что угол BCL равен $60°$ (внешний угол треугольника BCL равен сумме внутренних углов LBC и BCL). Отметим на стороне AB точку L' такую, что $\angle BCL' = 40°$. Тогда в треугольнике $BL'C$ углы $L'BC$ и BCL' равны $40°$, а значит, этот треугольник равнобедренный: $BL' = CL'$. Рассмотрим треугольник $L'CL$: $\angle L'CL = \angle BCL - \angle BCL' = 20°$, $\angle CLL' = 180° - \angle ALC = 80°$ (смежные углы CLL' и ALC в сумме дают $180°$), получаем, что $\angle LL'C = 80°$ (по сумме углов треугольника) и $L'CL$ - равнобедренный, $CL' = CL$. Треугольник $L'AC$ - также равнобедренный ($\angle AL'C = 80°, \angle CAL' = 20°$), следовательно, $AC = AL'$. Тогда $AB - AC = L'B = L'C = CL$.

Ответ: 8

Вариант 5 задания №7

Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$. На стороне AB взята точка L такая, что $\angle ALC = 100°$. Найдите CL, если $AB - AC = 1$.

Решение:



Заметим, что угол BCL равен $60°$ (внешний угол треугольника BCL равен сумме внутренних углов LBC и BCL). Отметим на стороне AB точку L' такую, что $\angle BCL' = 40°$. Тогда в треугольнике $BL'C$ углы $L'BC$ и BCL' равны $40°$, а значит, этот треугольник равнобедренный: $BL' = CL'$. Рассмотрим треугольник $L'CL$: $\angle L'CL = \angle BCL - \angle BCL' = 20°$, $\angle CLL' = 180° - \angle ALC = 80°$ (смежные углы CLL' и ALC в сумме дают $180°$), получаем, что $\angle LL'C = 80°$ (по сумме углов треугольника) и $L'CL$ - равнобедренный, $CL' = CL$. Треугольник $L'AC$ - также равнобедренный ($\angle AL'C = 80°, \angle CAL' = 20°$), следовательно, $AC = AL'$. Тогда $AB - AC = L'B = L'C = CL = 1$.

Ответ: 1

Задание №8 из 8 (9 кл). Что-то про функцию

Вариант 1 задания №8

График квадратичной функции $y = x^2 + kx - 1$, пересекает ось Ox в точках A и B, ось Oy в точке C. Чему равна наименьшая возможная площадь треугольника ABC? При каких k достигается минимальная площадь? Какие корни будут у этого уравнения при этих k?

Решение:

По условию у данного уравнения есть 2 корня. По теореме Виета произведение этих корней равно -1. Заметим, что один из корней положительный, другой отрицательный. Обозначим положительный корень за t, тогда отрицательный будет $-\frac{1}{t}$.
Наш график пересекает ось ординат при $x = 0$, тогда $y(0) = -1$. Значит, точка C имеет координаты $(0, -1)$.
Рассмотрим треугольник ABC, длина основания AB равна $t + \frac{1}{t}$. Длина высоты CO равна 1. Тогда площадь равна $(t + \frac{1}{t})/2$. Сумма обратных чисел не меньше 2. То есть наша площадь не меньше 1. Достигается при $t = 1$. Коэффициент k равен сумме корней уравнения т.е. 0.

Ответ: Минимальная площадь равна 1. Корни уравнения при этом равны 1 и -1. Коэффициент k равен 0.

Вариант 2 задания №8

График квадратичной функции $y = x^2 + kx - 4$, пересекает ось Ox в точках A и B, ось Oy в точке C. Чему равна наименьшая возможная площадь треугольника ABC? При каких k достигается минимальная площадь? Какие корни будут у этого уравнения при этих k?

Решение:

По условию у данного уравнения есть 2 корня. По теореме Виета произведение этих корней равно -4. Заметим, что один из корней положительный, другой отрицательный. Обозначим положительный корень за t, тогда отрицательный будет $-\frac{4}{t}$.
Наш график пересекает ось ординат при $x = 0$, тогда $y(0) = -4$. Значит, точка C имеет координаты $(0, -4)$.
Рассмотрим треугольник ABC, длина основания AB равна $t + \frac{4}{t}$. Длина высоты CO равна 4. Тогда площадь равна $2(t + \frac{4}{t}) = 4(\frac{t}{2} + \frac{2}{t})$. Сумма обратных чисел не меньше 2. То есть наша площадь не меньше 8. Достигается при $\frac{t}{2} + \frac{2}{t} = 2$. Откуда $t = 2, -\frac{4}{t} = -2$. Коэффициент k равен сумме корней уравнения т.е. $2 - 2 = 0$.

Ответ: Минимальная площадь равна 8. Корни уравнения при этом равны 2 и -2. Коэффициент k равен 0.

Вариант 3 задания №8

График квадратичной функции $y = x^2 + kx - 9$, пересекает ось Ox в точках A и B, ось Oy в точке C. Чему равна наименьшая возможная площадь треугольника ABC? При каких k достигается минимальная площадь? Какие корни будут у этого уравнения при этих k?

Решение:

По условию у данного уравнения есть 2 корня. По теореме Виета произведение этих корней равно -9. Заметим, что один из корней положительный, другой отрицательный. Обозначим положительный корень за t, тогда отрицательный будет $-\frac{9}{t}$.
Наш график пересекает ось ординат при $x = 0$, тогда $y(0) = -9$. Значит, точка C имеет координаты $(0, -9)$.
Рассмотрим треугольник ABC, длина основания AB равна $t + \frac{9}{t}$. Длина высоты CO равна 9. Тогда площадь равна $9(t + \frac{9}{t})/2 = 27(\frac{t}{3} + \frac{3}{t})/2$. Сумма обратных чисел не меньше 2. То есть наша площадь не меньше 27. Достигается при $\frac{t}{3} + \frac{3}{t} = 2$. Откуда $t = 3, -\frac{9}{t} = -3$. Коэффициент k равен сумме корней уравнения т.е. $3 - 3 = 0$.

Ответ: Минимальная площадь равна 27. Корни уравнения при этом равны 3 и -3. Коэффициент k равен 0.

Вариант 4 задания №8

График квадратичной функции $y = 2x^2 + kx - 2$, пересекает ось Ox в точках A и B, ось Oy в точке C. Чему равна наименьшая возможная площадь треугольника ABC? При каких k достигается минимальная площадь? Какие корни будут у этого уравнения при этих k?

Решение:

По условию у данного уравнения есть 2 корня. По теореме Виета произведение этих корней равно -1. Заметим, что один из корней положительный, другой отрицательный. Обозначим положительный корень за t, тогда отрицательный будет $-\frac{1}{t}$.
Наш график пересекает ось ординат при $x = 0$, тогда $y(0) = -2$. Значит, точка C имеет координаты $(0, -2)$.
Рассмотрим треугольник ABC, длина основания AB равна $t + \frac{1}{t}$. Длина высоты CO равна 2. Тогда площадь равна $(t + \frac{1}{t})$. Сумма обратных чисел не меньше 2. То есть наша площадь не меньше 2. Достигается при $t = 1, -\frac{1}{t} = -1$. Коэффициент k равен сумме корней уравнения т.е. 0.

Ответ: Минимальная площадь равна 2. Корни уравнения при этом равны 1 и -1. Коэффициент k равен 0.

Вариант 5 задания №8

График квадратичной функции $y = 4x^2 + kx - 4$, пересекает ось Ox в точках A и B, ось Oy в точке C. Чему равна наименьшая возможная площадь треугольника ABC? При каких k достигается минимальная площадь? Какие корни будут у этого уравнения при этих k?

Решение:

По условию у данного уравнения есть 2 корня. По теореме Виета произведение этих корней равно -1. Заметим, что один из корней положительный, другой отрицательный. Обозначим положительный корень за t, тогда отрицательный будет $-\frac{1}{t}$.
Наш график пересекает ось ординат при $x = 0$, тогда $y(0) = -4$. Значит, точка C имеет координаты $(0, -4)$.
Рассмотрим треугольник ABC, длина основания AB равна $t + \frac{1}{t}$. Длина высоты CO равна 4. Тогда

площадь равна $2(t+\frac{1}{t})$. Сумма обратных чисел не меньше 2. То есть наша площадь не меньше 4. Достигается при $t=1, -\frac{1}{t}=-1$. Коэффициент k равен сумме корней уравнения т.е. 0.

Ответ: Минимальная площадь равна 4. Корни уравнения при этом равны 1 и -1. Коэффициент k равен 0.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

10 класс

10 заданий по 5 баллов

(максимум 50 баллов)

продолжительность 120 минут

Задание №1 из 10 (10 кл). Верные утверждения – 10

Вариант 1 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) В произвольном треугольнике всегда найдутся два угла, разность градусных мер которых не превосходит по модулю 60°.

б) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 9, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные два результата сложить, то результат будет делиться на 9.

в) Если центр описанной окружности лежит на медиане, то такой треугольник всегда равнобедренный или равносторонний.

г) Если перемножить два произвольных иррациональных числа, то результат всегда будет числом иррациональным.

д) Если у квадратного трехчлена целые корни, то все его коэффициенты - целые числа.

Решение:

а) да, верно. Пусть это было бы неверно: возьмем самый меньший угол, тогда средний по величине как минимум на 60 градусов больше, а самый больший минимум на 120 градусов больше, так как он на 60 градусов больше среднего, но тогда сумма углов была бы не меньше суммы утроенного меньшего угла и 180 градусов, что противоречит сумме углов треугольника;

б) да, верно. Так как остаток при делении на 9 числа и суммы его цифр совпадает, то получается, раз сумма чисел делилась на 9 (остаток был равен 0 при делении на 9), то остаток от суммы суммы цифр будет также равен 0 при делении на 9;

в) нет, неверно. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на медиане, но треугольник не обязательно равнобедренный;

г) нет, неверно. Перемножим два числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Каждое из них - иррациональное число, а произведение - рациональное число 2;

д) нет, неверно. Возьмем многочлен $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{100}$. Его корни $x = 1$ и $x = 2$, но при этом его коэффициенты - не целые числа.

Ответ: а, б.

Вариант 2 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) В произвольном треугольнике всегда найдется сторона, которая меньше трети периметра этого треугольника.

б) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 5, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 5.

в) Если точка пересечения высот или их продолжений треугольника лежит вне треугольника, то такой треугольник обязательно тупоугольный.

г) Если перемножить два произвольных иррациональных числа, то результат всегда будет числом рациональным.

д) Если у квадратного трехчлена все коэффициенты - целые числа, то у такого трехчлена обязательно два корня.

Решение:

а) нет, неверно. Возьмем равносторонний треугольник - в нем все стороны равны трети периметра;

б) нет, неверно. Контрпример числа 14 и 11: суммы цифр равны 5 и 2 и если их сложить, 7 не разделится на 5;

в) да, верно. В тупоугольном треугольнике две высоты лежат снаружи и точка пересечения лежит вне. В прямоугольном точка пересечения высот совпадает с вершиной прямого угла. В остроугольном лежит внутри треугольника;

г) нет, неверно. Контрпример: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, их произведение равно $\sqrt{6}$ - иррациональное число;

д) нет, неверно. Контрпример: $f(x) = x^2 + 2x + 7$ - все коэффициенты целые, а корней нет.

Ответ: в

Вариант 3 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) В произвольном треугольнике всегда найдется сторона, которая не меньше трети периметра этого треугольника.

б) Существует треугольник, в котором один угол в 6 раз больше другого.

в) Если центр описанной окружности треугольника лежит на стороне треугольнике, то такой треугольник обязательно прямоугольный.

г) Если сложить два произвольных иррациональных числа, то результат всегда будет числом иррациональным.

д) Если у квадратного трехчлена все коэффициенты - целые числа, то если у него есть корни, то они тоже обязательно - целые числа.

Решение:

а) да, верно. Если бы не нашлось такой стороны, то каждая была бы меньше трети периметра, но тогда сумма трех сторон была бы меньше периметра, а не равна ему;

б) да, верно. Например, треугольник с углами 10, 60 и 110 градусов;

в) да, верно. Раз центр описанной окружности лежит на стороне, то эта сторона является диаметром окружности, а вписанный угол, опирающийся на диаметр - прямой;

г) нет, неверно. Контрпример: $1 - \sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ - иррациональные числа, но их сумма равна 1 - числу рациональному;

д) нет, неверно. Контрпример: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ - все коэффициенты - целые числа, а корни равны 1 и $\frac{1}{2}$.

Ответ: а, б, в.

Вариант 4 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) Если в треугольнике один угол в два раза больше другого, то в этом треугольнике обязательно есть сторона, которая в два раза больше другой стороны.

б) В любом треугольнике градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.

в) В остроугольном треугольнике точка пересечения высот или их продолжений всегда лежит внутри треугольника.

г) Если перемножить два произвольных рациональных числа, то результат всегда будет числом рациональным.

д) Если значения квадратного трехчлена при каких-то значениях аргумента положительны, а при каких-то отрицательны, то у такого трехчлена всегда два корня.

Решение:

а) нет, неверно. Возьмем прямоугольный равнобедренный треугольник, в нем нет стороны, которая в два раза больше другой;

б) нет, неверно. В равностороннем треугольнике все углы равны и нет пары углов, отличающихся хотя бы на 30 градусов;

в) да, верно. В остроугольном треугольнике все высоты лежат внутри треугольника, поэтому точка пересечения высот (ортоцентр) лежит также внутри треугольника;

г) да, верно. Раз числа рациональные, их можно представить в виде несократимых дробей с целым числителем и натуральным знаменателем $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, тогда их произведение - рациональное число (перемножим дроби, сократим в случае необходимости, получим требуемое представление);

д) да, верно. Заметим, что так как квадратный трехчлен - непрерывная функция, то у него есть как минимум один корень (лежит между аргументами, где значения положительно и отрицательно). При этом, корень не может быть один, так как в таком случае значения функции были бы или всюду неотрицательны, или всюду неположительны, а у нас есть значения разных знаков.

Ответ: в, г, д

Вариант 5 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) Если в треугольнике одна сторона в два раза больше другой, то в нем обязательно один угол в два раза больше другого.

б) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 4, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 4.

в) В произвольном треугольнике радиус описанной окружности всегда меньше любой медианы.

г) Если сложить два произвольных рациональных числа, то результат всегда будет числом рациональным.

д) Если у квадратного трехчлена старший коэффициент равен 1 и его корни - целые числа, то все его коэффициенты - целые числа.

Решение:

а) нет, неверно. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2. Так как его гипотенуза равна $\sqrt{5}$, то в треугольнике нет угла в 30 и 60 градусов. При этом он - не равнобедренный, значит угла в 45 градусов также нет. Значит, нет двух углов, среди которых один в два раза больше другого.

б) нет, неверно. Контрпример: числа 12 и 16, их суммы цифр равны 3 и 7 соответственно, если их сложить получится 10, которое не делится на 4;

в) нет, неверно. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен медиане, проведенной к гипотенузе;

г) да, верно. Раз числа рациональные, их можно представить в виде несократимых дробей с целым числителем и натуральным знаменателем $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, тогда их сумма - рациональное число (сложим дроби и в случае необходимости сократим числитель и знаменатель, получим представление рационального числа);

д) да, верно. По теореме Виета у приведенного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ выполняется, что $p = -x_1 - x_2$ и $q = x_1 x_2$.

Ответ: г, д.

Задание №2 из 10 (10 кл). Коты в мешке

Вариант 1 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 45% до 48%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное количество, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность, значит эта разность – минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 10% (55% - 45%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot 10 = 20$. В этом случае количество чёрных котов не меньше, чем $20 \cdot \frac{45}{100} = 9$. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 9

Вариант 2 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 46% до 48%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное количество, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность, значит эта разность – минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 8% (54% - 46%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot \frac{100}{8} = 25$. Но 25 - нечётное, тогда минимальное количество котов – 26. В этом случае количество чёрных котов не меньше, чем $26 \cdot \frac{46}{100} = 11,96$. То есть не меньше 12. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 12

Вариант 3 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 46% до 47%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное количество, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность, значит эта разность – минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 8% (54% - 46%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot \frac{100}{8} = 25$. Но 25 - нечётное, тогда минимальное количество котов – 26. В этом случае количество чёрных котов не меньше, чем $26 \cdot \frac{46}{100} = 11,96$. То есть не меньше 12. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 12

Вариант 4 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 45% до 49%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное количество, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность, значит эта разность – минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 10% (55% - 45%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot 10 = 20$. В этом случае количество чёрных котов не меньше, чем $20 \cdot \frac{45}{100} = 9$. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 9

Вариант 5 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 45% до 47%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное количество, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность, значит эта разность – минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 10% (55% - 45%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot 10 = 20$. В этом случае количество чёрных котов не меньше, чем $20 \cdot \frac{45}{100} = 9$. Осталось заметить, что этот случай возможен.

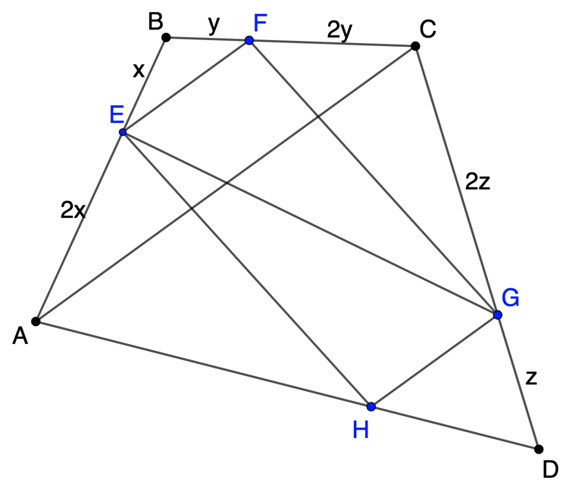
Ответ: 9

Задание №3 из 10 (10 кл). Площадь в площади

Вариант 1 задания №3

На сторонах AB, BC, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E, F, G так, что $AE : EB = CF : FB = CG : GD = 2 : 1$. Во сколько раз площадь четырёхугольника $ABCD$ больше площади треугольника EFG?

Решение:



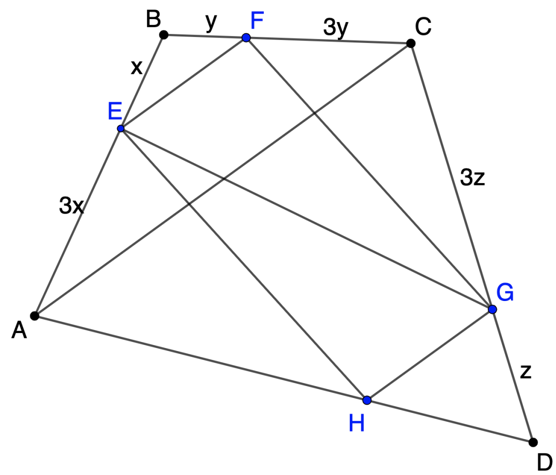
Отметим на стороне AD точку H такую, что $DH : HA = 1 : 2$. Заметим, что треугольники EBF и ABC подобны (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), тогда $S_{EBF} : S_{ABC} = 1 : 9$. Аналогично $S_{GDH} : S_{CDA} = 1 : 9$, $S_{EAH} : S_{BAD} = 4 : 9$, $S_{GDH} : S_{CDA} = 4 : 9$. Тогда $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} + S_{HAE})$, где $S_{EBF} + S_{GDH} = \frac{S_{ABCD}}{9}$ и $S_{FCG} + S_{HAE} = \frac{4S_{ABCD}}{9}$. Тогда $S_{EFGH} = \frac{4S_{ABCD}}{9}$. По теореме о пропорциональных отрезках $EF \parallel AC \parallel GH$, $FG \parallel BD \parallel EH$, следовательно, $EFGH$ - параллелограмм, а площадь треугольника EFG равна половине площади параллелограмма, поэтому $S_{EFG} = \frac{2S_{ABCD}}{9}$.

Ответ: 4,5

Вариант 2 задания №3

На сторонах AB, BC, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E, F, G так, что $AE : EB = CF : FB = CG : GD = 3 : 1$. Какую часть составляет площадь треугольника EFG от площади четырехугольника $ABCD$?

Решение:



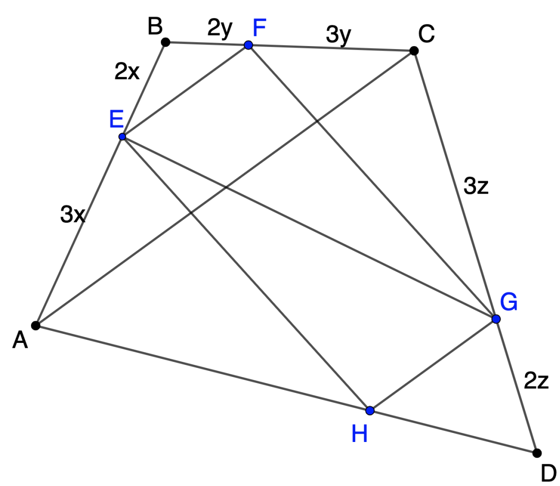
Отметим на стороне AD точку H такую, что $DH : HA = 1 : 3$. Заметим, что треугольники EBF и ABC подобны (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), тогда $S_{EBF} : S_{ABC} = 1 : 16$. Аналогично $S_{GDH} : S_{CDA} = 1 : 16$, $S_{EAH} : S_{BAD} = 9 : 16$, $S_{GDH} : S_{CDA} = 9 : 16$. Тогда $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} + S_{HAE})$, где $S_{EBF} + S_{GDH} = \frac{S_{ABCD}}{16}$ и $S_{FCG} + S_{HAE} = \frac{9S_{ABCD}}{16}$. Тогда $S_{EFGH} = \frac{3S_{ABCD}}{8}$. По теореме о пропорциональных отрезках $EF \parallel AC \parallel GH$, $FG \parallel BD \parallel EH$, следовательно, $EFGH$ - параллелограмм, а площадь треугольника EFG равна половине площади параллелограмма, поэтому $S_{EFG} = \frac{3S_{ABCD}}{16}$.

Ответ: 0,1875

Вариант 3 задания №3

На сторонах AB, BC, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E, F, G так, что $AE : EB = CF : FB = CG : GD = 3 : 2$. Какую часть составляет площадь треугольника EFG от площади четырехугольника $ABCD$?

Решение:



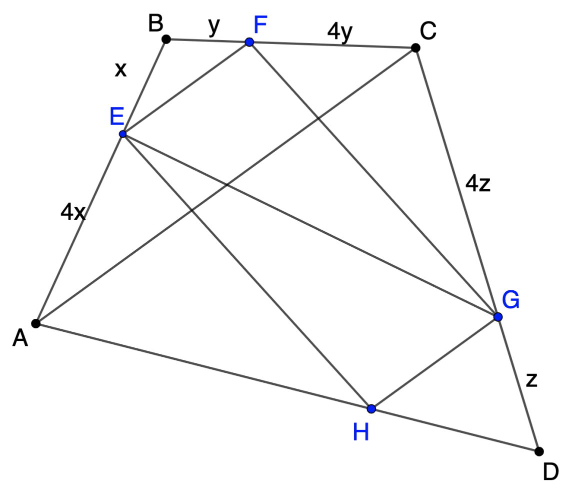
Отметим на стороне AD точку H такую, что $DH : HA = 2 : 3$. Заметим, что треугольники EBF и ABC подобны (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), тогда $S_{EBF} : S_{ABC} = 4 : 25$. Аналогично $S_{GDH} : S_{CDA} = 4 : 25$, $S_{EAH} : S_{BAD} = 9 : 25$, $S_{GDH} : S_{CDA} = 9 : 25$. Тогда $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} + S_{HAE})$, где $S_{EBF} + S_{GDH} = \frac{4S_{ABCD}}{25}$ и $S_{FCG} + S_{HAE} = \frac{9S_{ABCD}}{25}$. Тогда $S_{EFGH} = \frac{12S_{ABCD}}{25}$. По теореме о пропорциональных отрезках $EF \parallel AC \parallel GH$, $FG \parallel BD \parallel EH$, следовательно, $EFGH$ - параллелограмм, а площадь треугольника EFG равна половине площади параллелограмма, поэтому $S_{EFG} = \frac{6S_{ABCD}}{25}$.

Ответ: 0,24

Вариант 4 задания №3

На сторонах AB, BC, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E, F, G так, что $AE : EB = CF : FB = CG : GD = 4 : 1$. Во сколько раз площадь четырёхугольника $ABCD$ больше площади треугольника EFG?

Решение:



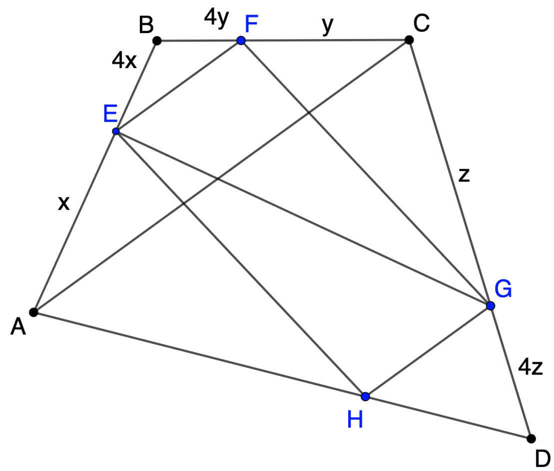
Отметим на стороне AD точку H такую, что $DH : HA = 1 : 4$. Заметим, что треугольники EBF и ABC подобны (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), тогда $S_{EBF} : S_{ABC} = 1 : 25$. Аналогично $S_{GDH} : S_{CDA} = 1 : 25$, $S_{EAH} : S_{BAD} = 16 : 25$, $S_{GDH} : S_{CDA} = 16 : 25$. Тогда $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} + S_{HAE})$, где $S_{EBF} + S_{GDH} = \frac{S_{ABCD}}{25}$ и $S_{FCG} + S_{HAE} = \frac{16S_{ABCD}}{25}$. Тогда $S_{EFGH} = \frac{8S_{ABCD}}{25}$. По теореме о пропорциональных отрезках $EF \parallel AC \parallel GH$, $FG \parallel BD \parallel EH$, следовательно, $EFGH$ - параллелограмм, а площадь треугольника EFG равна половине площади параллелограмма, поэтому $S_{EFG} = \frac{4S_{ABCD}}{25}$.

Ответ: 6,25

Вариант 5 задания №3

На сторонах AB, BC, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E, F, G так, что $AE : EB = CF : FB = CG : GD = 1 : 4$. Во сколько раз площадь четырёхугольника $ABCD$ больше площади треугольника EFG?

Решение:



Отметим на стороне AD точку H такую, что $DH : HA = 4 : 1$. Заметим, что треугольники EBF и ABC подобны (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), тогда $S_{EBF} : S_{ABC} = 16 : 25$. Аналогично $S_{GDH} : S_{CDA} = 16 : 25$, $S_{EAH} : S_{BAD} = 1 : 25$, $S_{GDH} : S_{CDA} = 1 : 25$. Тогда $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} + S_{HAE})$, где $S_{EBF} + S_{GDH} = \frac{16 S_{ABCD}}{25}$ и $S_{FCG} + S_{HAE} = \frac{S_{ABCD}}{25}$. Тогда $S_{EFGH} = \frac{8 S_{ABCD}}{25}$. По теореме о пропорциональных отрезках $EF \parallel AC \parallel GH$, $FG \parallel BD \parallel EH$, следовательно, $EFGH$ - параллелограмм, а площадь треугольника EFG равна половине площади параллелограмма, поэтому $S_{EFG} = \frac{4 S_{ABCD}}{25}$.

Ответ: 6,25

Задание №4 из 10 (10 кл). Особые числа

Вариант 1 задания №4

Натуральное число n называется «особенным», если произведение всех его натуральных делителей равно n^2. Сколько «особенных» чисел, удовлетворяющих неравенству $20 \le n \le 40$?

Решение:

Все делители числа n разбиваются на пары чисел, дающих в произведение само n (если число является квадратом, то будем считать, что делитель в паре с самим собой).

Заметим, что «особенное» число не может быть полным квадратом т.к. тогда произведение всех делителей будет равно $\sqrt{n} \cdot n^t = n^2$, где t – количество полных пар делителей. Степень слева нецелая, а справа равна двум. Противоречие.

Значит, «особенное» число не является полным квадратом, формула имеет вид $n^t = n^2$. То есть у n всего 2 пары делителей.

Первая пара - это 1 и n. Пусть вторая пара p и q, причём $p < q$. Любой делитель чисел p и q будет также делителем числа n. Значит, у p и q нет других делителей, кроме 1 и самих p и q.

У числа p нет делителей кроме 1 и p т.к. $p < q$. Тогда p – простое.

У числа q либо 2 делителя: 1 и q, тогда оно простое. Либо у него ровно 3 делителя 1, p и q. В таком случае q является степенью простого числа p т.к. не может делиться ни на одно другое простое число. Если q – хотя бы третья степень числа p, то q также делится на p^2, а такого делителя нет. Значит, $q = p^2$.

Таким образом, «особенное» число n либо является произведением двух различных простых чисел p и q, либо является произведением чисел p и p^2 т.е. является третьей степенью простого числа.

Перебором находим ответ.

Числа равные произведению двух простых: $21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39$.

Числа равные кубу простого числа: 27.

Всего 9 «особенных» чисел.

Ответ: 9

Вариант 2 задания №4

Натуральное число n называется «особенным», если произведение всех его натуральных делителей равно n^2. Сколько «особенных» чисел, удовлетворяющих неравенству $10 \le n \le 30$?

Решение:

Все делители числа n разбиваются на пары чисел, дающих в произведение само n (если число является квадратом, то будем считать, что делитель в паре с самим собой).

Заметим, что «особенное» число не может быть полным квадратом т.к. тогда произведение всех делителей будет равно $\sqrt{n} \cdot n^t = n^2$, где t – количество полных пар делителей. Степень слева нецелая, а справа равна двум. Противоречие.

Значит, «особенное» число не является полным квадратом, формула имеет вид $n^t = n^2$. То есть у n всего 2 пары делителей.

Первая пара - это 1 и n. Пусть вторая пара p и q, причём $p < q$. Любой делитель чисел p и q будет также делителем числа n. Значит, у p и q нет других делителей, кроме 1 и самих p и q.

У числа p нет делителей кроме 1 и p т.к. $p < q$. Тогда p – простое.

У числа q либо 2 делителя: 1 и q, тогда оно простое. Либо у него ровно 3 делителя 1, p и q. В таком случае q является степенью простого числа p т.к. не может делиться ни на одно другое простое число. Если q хотя бы третья степень числа p, то q также делится на p^2, а такого делителя нет. Значит, $q = p^2$.

Таким образом, «особенное» число n либо является произведением двух различных простых чисел p и q, либо является произведением чисел p и p^2 т.е. является третьей степенью простого числа.

Перебором находим ответ.

Числа равные произведению двух простых: $10, 14, 15, 21, 22, 26$.

Числа равные кубу простого числа: 27.

Всего 7 «особенных» чисел.

Ответ: 7

Вариант 3 задания №4

Натуральное число n называется «особенным», если произведение всех его натуральных делителей равно n^2. Сколько «особенных» чисел, удовлетворяющих неравенству $10 \leq n \leq 40$?

Решение:

Все делители числа n разбиваются на пары чисел, дающих в произведение само n (если число является квадратом, то будем считать, что делитель в паре с самим собой).

Заметим, что «особенное» число не может быть полным квадратом т.к. тогда произведение всех делителей будет равно $\sqrt{n} \cdot n^t = n^2$, где t – количество полных пар делителей. Степень слева нецелая, а справа равна двум. Противоречие.

Значит, «особенное» число не является полным квадратом, формула имеет вид $n^t = n^2$. То есть у n всего 2 пары делителей.

Первая пара - это 1 и n. Пусть вторая пара p и q, причём $p < q$. Любой делитель чисел p и q будет также делителем числа n. Значит, у p и q нет других делителей, кроме 1 и самих p и q.

У числа p нет делителей кроме 1 и p т.к. $p < q$. Тогда p – простое.

У числа q либо 2 делителя: 1 и q, тогда оно простое. Либо у него ровно 3 делителя 1, p и q. В таком случае q является степенью простого числа p т.к. не может делиться ни на одно другое простое число. Если q хотя бы третья степень числа p, то q также делится на p^2, а такого делителя нет. Значит, $q = p^2$.

Таким образом, «особенное» число n либо является произведением двух различных простых чисел p и q, либо является произведением чисел p и p^2 т.е. является третьей степенью простого числа.

Перебором находим ответ.

Числа равные произведению двух простых: $10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39$.

Числа равные кубу простого числа: 27.

Всего 12 «особенных» чисел.

Ответ: 12

Вариант 4 задания №4

Натуральное число n называется «особенным», если произведение всех его натуральных делителей равно n^2. Сколько «особенных» чисел, удовлетворяющих неравенству $20 \le n \le 50$?

Решение:

Все делители числа n разбиваются на пары чисел, дающих в произведение само n (если число является квадратом, то будем считать, что делитель в паре с самим собой).

Заметим, что «особенное» число не может быть полным квадратом т.к. тогда произведение всех делителей будет равно $\sqrt{n} \cdot n^t = n^2$, где t – количество полных пар делителей. Степень слева нецелая, а справа равна двум. Противоречие.

Значит, «особенное» число не является полным квадратом, формула имеет вид $n^t = n^2$. То есть у n всего 2 пары делителей.

Первая пара - это 1 и n. Пусть вторая пара p и q, причём $p < q$. Любой делитель чисел p и q будет также делителем числа n. Значит, у p и q нет других делителей, кроме 1 и самих p и q.

У числа p нет делителей кроме 1 и p т.к. $p < q$. Тогда p – простое.

У числа q либо 2 делителя: 1 и q, тогда оно простое. Либо у него ровно 3 делителя 1, p и q. В таком случае q является степенью простого числа p т.к. не может делиться ни на одно другое простое число. Если q хотя бы третья степень числа p, то q также делится на p^2, а такого делителя нет. Значит, $q = p^2$.

Таким образом, «особенное» число n либо является произведением двух различных простых чисел p и q, либо является произведением чисел p и p^2 т.е. является третьей степенью простого числа.

Перебором находим ответ.

Числа равные произведению двух простых: $21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46$.

Числа равные кубу простого числа: 27.

Всего 10 «особенных» чисел.

Ответ: 10

Вариант 5 задания №4

Натуральное число n называется «особенным», если произведение всех его натуральных делителей равно n^2. Сколько «особенных» чисел, удовлетворяющих неравенству $25 \le n \le 45$?

Решение:

Все делители числа n разбиваются на пары чисел, дающих в произведение само n (если число является квадратом, то будем считать, что делитель в паре с самим собой).

Заметим, что «особенное» число не может быть полным квадратом т.к. тогда произведение всех делителей будет равно $\sqrt{n} \cdot n^t = n^2$, где t – количество полных пар делителей. Степень слева нецелая, а справа равна двум. Противоречие.

Значит, «особенное» число не является полным квадратом, формула имеет вид $n^t = n^2$. То есть у n всего 2 пары делителей.

Первая пара - это 1 и n. Пусть вторая пара p и q, причём $p < q$. Любой делитель чисел p и q будет также делителем числа n. Значит, у p и q нет других делителей, кроме 1 и самих p и q.

У числа p нет делителей кроме 1 и p т.к. $p < q$. Тогда p – простое.

У числа q либо 2 делителя: 1 и q, тогда оно простое. Либо у него ровно 3 делителя 1, p и q. В таком случае q является степенью простого числа p т.к. не может делиться ни на одно другое простое число. Если q хотя бы третья степень числа p, то q также делится на p^2, а такого делителя нет. Значит, $q = p^2$.

Таким образом, «особенное» число n либо является произведением двух различных простых чисел p и q, либо является произведением чисел p и p^2 т.е. является третьей степенью простого числа.

Перебором находим ответ.

Числа равные произведению двух простых: $26, 33, 34, 35, 38, 39$.

Числа равные кубу простого числа: 27.

Всего 7 «особенных» чисел.

Ответ: 7

Задание №5 из 10 (10 кл). Анаграммы

Вариант 1 задания №5

Из карточек с буквами составлено слово ДИСКРИМИНАНТ. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), где три буквы И не стоят рядом.

Решение:

Для начала посчитаем количество всевозможных анаграмм. Всего у нас 12 букв, среди них одинаковые – 3 буквы И, 2 буквы Н. Количество способов расставить буквы в ряд – 12!, но слова полученные переставлением одинаковых букв считаются одинаковыми. То есть мы должны поделить на количество способов переставить буквы И и Н. Соответственно на 3! и на 2!. Итого $\frac{12!}{3!2!}$
Из этих способов нужно убрать те, где буквы И стоят рядом. Давайте объединим три буквы И в большой блок и считать его отдельной буквой. Тогда нам нужно расставить уже 10 букв. Считаем аналогично, получаем: $\frac{10!}{2!}$.
Тогда всего слов: $\frac{12!}{3!2!} - \frac{10!}{2!} = 38102400$.

Ответ: 38102400

Вариант 2 задания №5

Из карточек с буквами составлено слово ДИСКРИМИНАНТ. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), где буквы М и А соседние.

Решение:

Давайте объединим буквы М и А в большой блок и считать его отдельной буквой. Тогда нам нужно расставить уже 11 букв. Посчитаем количество всевозможных анаграмм. Всего у нас 11 букв, среди них одинаковые – 3 буквы И, 2 буквы Н. Количество способов расставить буквы в ряд – 11!, но слова полученные переставлением одинаковых букв считаются одинаковыми. То есть мы должны поделить на количество способов переставить буквы И и Н. Соответственно на 3! и на 2!. Итого $\frac{11!}{3!2!}$
Осталось заметить, что в нашем блоке буквы М и А можно менять местами т.е. нужно удвоить количество способов. Получим 6652800 способов.

Ответ: 6652800

Вариант 3 задания №5

Из карточек с буквами составлено слово ДИСКРИМИНАНТ. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), где первая буква – согласная.

Решение:

Всего у нас 8 согласных букв. Тогда на 1ое место – 8 способов, на 2ое уже 11 способов, на 3ее 10 способов и т.д. Слова полученные переставлением одинаковых букв считаются одинаковыми. То есть мы должны поделить на количество способов переставить буквы И и Н. Соответственно на 3! и на 2!. Итого $\frac{8 \cdot 11!}{3!2!}$

Ответ: 26611200

Вариант 4 задания №5

Из карточек с буквами составлено слово ДИСКРИМИНАНТ. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), где встречается буквосочетание МАТ?

Решение:

Давайте объединим буквы М,А и Т в большой блок и считать его отдельной буквой. Тогда нам нужно расставить уже 10 букв. Посчитаем количество всевозможных анаграмм. Всего у нас 10 букв, среди них одинаковые – 3 буквы И, 2 буквы Н. Количество способов расставить буквы в ряд – 10!, но слова полученные переставлением одинаковых букв считаются одинаковыми. То есть мы должны поделить на количество способов переставить буквы И и Н. Соответственно на 3! и на 2!. Итого $\frac{10!}{3!2!}$. Получим 302400 способов.

Ответ: 302400

Вариант 5 задания №5

Из карточек с буквами составлено слово ДИСКРИМИНАНТ. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), где все гласные буквы стоят подряд.

Решение:

Давайте объединим гласные буквы в один блок и будем считать его отдельной буквой. Количество способов «собрать» такой блок – это количество способов расставить гласные буквы в ряд. Так как у нас всего одна буква А, а остальные три буквы – И, то всего 4 способа расставить гласные.
Теперь считаем блок одной буквой. Тогда нам нужно расставить уже 9 букв. Посчитаем количество всевозможных анаграмм. Количество способов расставить буквы в ряд – 9!.Но слова полученные переставлением одинаковых букв считаются одинаковыми. То есть мы должны поделить на количество способов переставить буквы Н. Соответственно на 2!. Итого $\frac{4 \cdot 9!}{2!}$ Получим 725760 способов.

Ответ: 725760

Задание №6 из 10 (10 кл). Что-то про функцию

Вариант 1 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-5x+16$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-5(t+2)+16$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-t+10$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$. Подставляем, $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+10=9\frac{3}{4}$.

Ответ: 9,75 при значении аргумента 0,5.

Вариант 2 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-6x+19$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-6(t+2)+19$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-2t+11$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=1$. Подставляем, получаем 10.

Ответ: 10 при значении аргумента 1

Вариант 3 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-6x+18$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-6(t+2)+18$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-2t+10$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=1$. Подставляем, получаем 9.

Ответ: 9 при значении аргумента 1.

Вариант 4 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-4x+15$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-4(t+2)+15$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2+11$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=0$. Подставляем, получаем 11.

Ответ: 11 при значении аргумента 0

Вариант 5 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-7x+17$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-7(t+2)+17$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-3t+7$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$. Подставляем, $\frac{9}{4}-3\cdot\frac{3}{2}+7=4\frac{3}{4}$.

Ответ: 4,75 при значении аргумента 1,5

Задание №7 из 10 (10 кл). Углы в треугольнике

Вариант 1 задания №7

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 53°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n°$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180°$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180° - n°$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180° - \angle AA_1B = n°$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180° - n°$. Подставив $n = 53$, получаем, что ответ $127°$.

Ответ: 127

Вариант 2 задания №7

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 76°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n°$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180°$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180° - n°$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180° - \angle AA_1B = n°$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180° - n°$. Подставив $n = 76$, получаем, что ответ $104°$.

Ответ: 104

Вариант 3 задания №7

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 96°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n°$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180°$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180° - n°$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180° - \angle AA_1B = n°$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180° - n°$. Подставив $n = 96$, получаем, что ответ $84°$.

Ответ: 84

Вариант 4 задания №7

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 75°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n^\circ$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180^\circ$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180^\circ - n^\circ$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180^\circ - \angle AA_1B = n^\circ$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180^\circ - n^\circ$. Подставив $n = 75$, получаем, что ответ 105°.

Ответ: 105

Вариант 5 задания №7

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 69^\circ$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n^\circ$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180^\circ$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180^\circ - n^\circ$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180^\circ - \angle AA_1B = n^\circ$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180^\circ - n^\circ$. Подставив $n = 69$, получаем, что ответ 111°.

Ответ: 111

Задание №8 из 10 (10 кл). Радикальная сумма

Вариант 1 задания №8

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{3x} + \sqrt{3y} = \sqrt{168}$

Решение:

Разделим на $\sqrt{3}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{14}$. Заметим, что $56 \geq x \geq 0$ и $56 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 56 - 4\sqrt{14y} + y$. Получаем, что $\sqrt{14y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 14$, либо $y = 56$.

Итого получаем три решения: $(0; 56)$, $(56; 0)$, $(14; 14)$.

Ответ: 3

Вариант 2 задания №8

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{3x}+\sqrt{3y} = \sqrt{180}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{3}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{15}$. Заметим, что $60 \geq x \geq 0$ и $60 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 60 - 4\sqrt{15y} + y$. Получаем, что $\sqrt{15y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 15$, либо $y = 60$.

Итого получаем три решения: $(0; 60)$, $(60; 0)$, $(15; 15)$.

Ответ: 3

Вариант 3 задания №8

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{5x}+\sqrt{5y} = \sqrt{260}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{5}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{13}$. Заметим, что $52 \geq x \geq 0$ и $52 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 52 - 4\sqrt{13y} + y$. Получаем, что $\sqrt{13y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 13$, либо $y = 52$.

Итого получаем три решения: $(0; 52)$, $(52; 0)$, $(13; 13)$.

Ответ: 3

Вариант 4 задания №8

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{2x}+\sqrt{2y} = \sqrt{252}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{2}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{14}$. Заметим, что $126 \geq x \geq 0$ и $126 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 126 - 6\sqrt{14y} + y$. Получаем, что $\sqrt{14y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 14$, либо $y = 56$, либо $y = 126$.

Итого получаем четыре решения: $(0; 126)$, $(14; 56)$, $(56; 14)$, $(126; 0)$.

Ответ: 4

Вариант 5 задания №8

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{2x}+\sqrt{2y} = \sqrt{270}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{2}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{15}$. Заметим, что $135 \geq x \geq 0$ и $135 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 135 - 6\sqrt{15y} + y$. Получаем, что $\sqrt{15y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 15$, либо $y = 60$, либо $y = 135$.

Итого получаем четыре решения: $(0; 135)$, $(15; 60)$, $(60; 15)$, $(135; 0)$.

Ответ: 4

Задание №9 из 10 (10 кл). Лжецы и рыцари

Вариант 1 задания №9

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2021 островитянина, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем у обоих моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N+1$ островитянина. Докажем, что ответ: $N = 1010$

Заметим, что два рыцаря (A и B) не могут стоять рядом, иначе у рыцаря A было бы больше друзей, чем у рыцаря B, а у рыцаря B было бы больше друзей, чем у рыцаря A, а оба этих условия не могут быть выполнены одновременно. Значит, количество рыцарей не превышает наибольшего целого числа, не превосходящего половины N (в данном случае 1010).

Пример такой ситуации - рыцари - все, кто стоит на чётных позициях, и более никто, и они же все попарно знакомы друг с другом, и больше знакомых нет.

Ответ: 1010

Вариант 2 задания №9

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2019 островитян, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем у обоих моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N+1$ островитянина. Докажем, что ответ: $N = 1009$

Заметим, что два рыцаря (A и B) не могут стоять рядом, иначе у рыцаря A было бы больше друзей, чем у рыцаря B, а у рыцаря B было бы больше друзей, чем у рыцаря A, а оба этих условия не могут быть выполнены одновременно. Значит, количество рыцарей не превышает наибольшего целого числа, не превосходящего половины N (в данном случае 1009).

Пример такой ситуации - рыцари - все, кто стоит на чётных позициях, и более никто, и они же все попарно знакомы друг с другом, и больше знакомых нет.

Ответ: 1009

Вариант 3 задания №9

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2023 островитян, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем у обоих моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N+1$ островитянина. Докажем, что ответ: $N = 1011$

Заметим, что два рыцаря (A и B) не могут стоять рядом, иначе у рыцаря A было бы больше друзей, чем у рыцаря B, а у рыцаря B было бы больше друзей, чем у рыцаря A, а оба этих условия не могут быть выполнены одновременно. Значит, количество рыцарей не превышает наибольшего целого числа, не превосходящего половины N (в данном случае 1011).

Пример такой ситуации - рыцари - все, кто стоит на чётных позициях, и более никто, и они же все попарно знакомы друг с другом, и больше знакомых нет.

Ответ: 1011

Вариант 4 задания №9

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2025 островитян, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем у обоих моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N + 1$ островитянина. Докажем, что ответ: $N = 1012$

Заметим, что два рыцаря (A и B) не могут стоять рядом, иначе у рыцаря A было бы больше друзей, чем у рыцаря B, а у рыцаря B было бы больше друзей, чем у рыцаря A, а оба этих условия не могут быть выполнены одновременно. Значит, количество рыцарей не превышает наибольшего целого числа, не превосходящего половины N (в данном случае 1012).

Пример такой ситуации - рыцари - все, кто стоит на чётных позициях, и более никто, и они же все попарно знакомы друг с другом, и больше знакомых нет.

Ответ: 1012

Вариант 5 задания №9

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2017 островитян, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем у обоих моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N + 1$ островитянина. Докажем, что ответ: $N = 1008$

Заметим, что два рыцаря (A и B) не могут стоять рядом, иначе у рыцаря A было бы больше друзей, чем у рыцаря B, а у рыцаря B было бы больше друзей, чем у рыцаря A, а оба этих условия не могут быть выполнены одновременно. Значит, количество рыцарей не превышает наибольшего целого числа, не превосходящего половины N (в данном случае 1008).

Пример такой ситуации - рыцари - все, кто стоит на чётных позициях, и более никто, и они же все попарно знакомы друг с другом, и больше знакомых нет.

Ответ: 1008

Задание №10 из 10 (10 кл). Наборы чисел

Вариант 1 задания №10

Маше дали набор чисел: 5, 5, -4, -4, 3, 3, -3, -3, 2, 2, -2, -2, 1, 1, -1, -1 и поручили в вершины шестнадцатиугольника вписать по одному числу. Затем Маша сложила числа в противоположных вершинах и полученные суммы перемножила. Какое наименьшее положительное число у неё могло получиться?

Решение:

Мы должны получить целое положительное т.е. наименьшее натуральное число.
Среди наших 16ти чисел – 6 чётных и 10 нечётных. Тогда среди 8-ми пар чисел, в противоположных вершинах, найдутся, как минимум 2 пары с чётной суммой. Если это не так, то у нас как минимум 7 пар с нечётной суммой, в каждой такой паре обязательно найдётся по чётному числу, а их всего 6, противоречие.
Таким образом, у двух пар сумма будет не меньше двух. Тогда общее произведение не меньше 4.
Приведём пример на 4, покажем как числа разбиваются на пары:
5 и -4
5 и -4
3 и -2
3 и -2
-3 и 1
-3 и 1
2 и -1
2 и -1.

Ответ: 4

Вариант 2 задания №10

Маше дали набор чисел: 6, 6, -5, -5, 5, 5, -4, -4, 3, 3, -3, -3, 2, 2, -2, -2, 1, 1, -1, -1 и поручили в вершины двадцатиугольника вписать по одному числу. Затем Маша сложила числа в противоположных вершинах и полученные суммы перемножила. Какое наименьшее положительное число у неё могло получиться?

Решение:

Мы должны получить целое положительное т.е. наименьшее натуральное число.
Среди наших 20ти чисел – 8 чётных и 12 нечётных. Тогда среди 10ти пар чисел, в противоположных вершинах, найдутся, как минимум 2 пары с чётной суммой. Если это не так, то у нас как минимум 9 пар с нечётной суммой, в каждой такой паре обязательно найдётся по чётному числу, а их всего 8, противоречие.
Таким образом, у двух пар сумма будет не меньше двух. Тогда общее произведение не меньше 4.
Приведём пример на 4, покажем как числа разбиваются на пары:
6 и -5
6 и -5
5 и -4

5 и -4

3 и -2

3 и -2

-3 и 1

-3 и 1

2 и -1

2 и -1.

Ответ: 4

Вариант 3 задания №10

Маше дали набор чисел: 6, 6, -4, -4, 2, 2, -2, -2, 1, 1, -1, -1 и поручили в вершины двенадцатиугольника вписать по одному числу. Затем Маша сложила числа в противоположных вершинах и полученные суммы перемножила. Какое наименьшее положительное число у неё могло получиться?

Решение:

Мы должны получить целое положительное т.е. наименьшее натуральное число.
Среди наших 12ти чисел – 8 чётных и 4 нечётных. Тогда среди 6ти пар чисел, в противоположных вершинах, найдутся, как минимум 2 пары с чётной суммой. Если это не так, то у нас как минимум 5 пар с нечётной суммой, в каждой такой паре обязательно найдётся по нечётному числу, а их всего 4, противоречие.
Таким образом, у двух пар сумма будет не меньше двух. Тогда общее произведение не меньше 4.
Приведём пример на 4, покажем как числа разбиваются на пары:

6 и -4

6 и -4

2 и -1

2 и -1

-2 и 1

-2 и 1.

Ответ: 4

Вариант 4 задания №10

Маше дали набор чисел: -15, -15, 14, 14, 13, 13, -13, -13, 12, 12, -12, -12, 11, 11, -11, -11 и поручили в вершины шестнадцатиугольника вписать по одному числу. Затем Маша сложила числа в противоположных вершинах и полученные суммы перемножила. Какое наименьшее положительное число у неё могло получиться?

Решение:

Мы должны получить целое положительное т.е. наименьшее натуральное число.
Среди наших 16ти чисел – 6 чётных и 10 нечётных. Тогда среди 8-ми пар чисел, в противоположных вершинах, найдутся, как минимум 2 пары с чётной суммой. Если это не так, то у нас как минимум 7 пар с нечётной суммой, в каждой такой паре обязательно найдётся по чётному числу, а их всего 6, противоречие.
Таким образом, у двух пар сумма будет не меньше двух. Тогда общее произведение не меньше 4.

Приведём пример на 4, покажем как числа разбиваются на пары:

-15 и 14

-15 и 14

13 и -12

13 и -12

-13 и 11

-13 и 11

12 и -11

12 и -11.

Ответ: 4

Вариант 5 задания №10

Маше дали набор чисел: -7, -7, -10, -10, 9, 9, 8, 8, -9, -9, 11, 11 и поручили в вершины двенадцатиугольника вписать по одному числу. Затем Маша сложила числа в противоположных вершинах и полученные суммы перемножила. Какое наименьшее положительное число у неё могло получиться?

Решение:

Мы должны получить целое положительное т.е. наименьшее натуральное число.

Среди наших 12ти чисел – 4 чётных и 8 нечётных. Тогда среди 6ти пар чисел, в противоположных вершинах, найдутся, как минимум 2 пары с чётной суммой. Если это не так, то у нас как минимум 5 пар с нечётной суммой, в каждой такой паре обязательно найдётся по чётному числу, а их всего 4, противоречие.

Таким образом, у двух пар сумма будет не меньше двух. Тогда общее произведение не меньше 4.

Приведём пример на 4, покажем как числа разбиваются на пары:

11 и -10

11 и -10

9 и -7

9 и -7

-9 и 8

-9 и 8

.

Ответ: 4

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

10 заданий по 5 баллов

(максимум 50 баллов)

продолжительность 120 минут

Задание №1 из 10 (11 кл). Верные утверждения – 11

Вариант 1 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) В произвольном треугольнике всегда найдутся два угла, разность градусных мер которых не превосходит по модулю 60°.

б) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 9, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные два результата сложить, то результат будет делиться на 9.

в) Если прямая a, лежащая в плоскости α перпендикулярна прямой b, то прямая b перпендикулярна плоскости α.

г) Если перемножить два произвольных иррациональных числа, то результат всегда будет числом иррациональным.

д) Если график функции не пересекает ось Ox, то значения функции всегда или только положительны, или только отрицательны.

Решение:

а) да, верно. Пусть это было бы неверно: возьмем самый меньший угол, тогда средний по величине как минимум на 60 градусов больше, а самый больший минимум на 120 градусов больше, так как он на 60 градусов больше среднего, но тогда сумма углов была бы не меньше суммы утроенного меньшего угла и 180 градусов, что противоречит сумме углов треугольника;

б) да, верно. Так как остаток при делении на 9 числа и суммы его цифр совпадает, то получается, раз сумма чисел делилась на 9 (остаток был равен 0 при делении на 9), то остаток от суммы суммы цифр будет также равен 0 при делении на 9;

в) нет, неверно. В правильном тетраэдре противоположные ребра перпендикулярны, но ни одно ребро не является высотой такого тетраэдра. Напомним, что в плоскости α должны были найтись две пересекающиеся прямые, перпендикулярные прямой b, чтобы выполнялось, что $b \perp \alpha$;

г) нет, неверно. Перемножим два числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Каждое из них - иррациональное число, а произведение - рациональное число 2;

д) нет, неверно. Контрпример график гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Утверждение было бы верным, если бы функция была непрерывной.

Ответ: а, б.

Вариант 2 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) Существует треугольник, в котором разность двух градусных мер углов равна 60°.

б) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 5, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 5.

в) Если прямая a параллельна плоскости α, то она параллельна любой прямой в плоскости α.

г) Если перемножить два произвольных иррациональных числа, то результат всегда будет числом рациональным.

д) Если график квадратного трехчлена не пересекает ось Ox, то значения этого трехчлена всегда или только положительны, или только отрицательны.

Решение:

а) да, верно. Например, треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов;

б) нет, неверно. Контрпример числа 14 и 11: суммы цифр равны 5 и 2 и если их сложить, 7 не разделится на 5;

в) нет, неверно. В плоскости α найдется прямая, которая не лежит в одной плоскости с прямой a, тогда они будут скрещивающимися, но не параллельными;

г) нет, неверно. Контрпример: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, их произведение равно $\sqrt{6}$ - иррациональное число;

д) да, верно. Раз у квадратного трехчлена нет корней, то либо его вершина лежит выше оси Ox и его ветви направлены вверх (все значения положительны), либо его вершина лежит ниже оси Ox и его ветви направлены вниз (все значения отрицательны).

Ответ: а, д

Вариант 3 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) Если в треугольнике медиана совпадает с биссектрисой, то он - равнобедренный или равносторонний.

б) Существует треугольник, в котором один угол в 6 раз больше другого.

в) Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то она перпендикулярна любой прямой в плоскости α.

г) Если сложить два произвольных иррациональных числа, то результат всегда будет числом иррациональным.

д) Если значения функции при каком-то значении аргумента положительны, а при каком-то отрицательны, то функция обязательно обращается в какой-то точке в 0.

Решение:

а) да, верно. Признак равнобедренного треугольника;

б) да, верно. Например, подойдет треугольник с углами 10, 60 и 110 градусов;

в) да, верно. Определение перпендикулярности прямой и плоскости;

г) нет, неверно. Контрпример: $1-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ - иррациональные числа, но их сумма равна 1 - числу рациональному;

д) нет, неверно. Контрпример: $f(x)=\frac{1}{x}$. Утверждение было бы верным, если бы функция была непрерывной.

Ответ: а, б, в

Вариант 4 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) Если в треугольнике центр описанной окружности лежит на медиане, то такой треугольник всегда равнобедренный или равносторонний.

б) В любом треугольнике градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.

в) Если в пространстве прямая a перпендикулярна прямой b, а прямая b перпендикулярна прямой c, то $a||c$.

г) Если перемножить два произвольных рациональных числа, то результат всегда будет числом рациональным.

д) Если значения квадратного трехчлена при каких-то значениях аргумента положительны, а при каких-то отрицательны, то у такого трехчлена всегда два корня.

Решение:

а) нет, неверно. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на медиане, но треугольник не обязательно равнобедренный;

б) нет, неверно. В равностороннем треугольнике все углы равны и нет пары углов, отличающихся хотя бы на 30 градусов;

в) нет, неверно. Пусть a перпендикулярна некоторой плоскости α, в которой лежат прямые b и c такие, что $b \perp c$, тогда $a \perp c$;

г) да, верно. Раз числа рациональные, их можно представить в виде несократимых дробей с целым числителем и натуральным знаменателем $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, тогда их произведение - рациональное число (перемножим дроби, сократим в случае необходимости, получим требуемое представление);

д) да, верно. Заметим, что так как квадратный трехчлен - непрерывная функция, то у него есть как минимум один корень (лежит между аргументами, где значения положительно и отрицательно). При этом, корень не может быть один, так как в таком случае значения функции были бы или всюду неотрицательны, или всюду не положительны, а у нас есть значения разных знаков.

Ответ: г, д

Вариант 5 задания №1

Выберите все верные утверждения:

а) Существует треугольник, в котором градусная мера одного угла хотя бы на 30 больше градусной меры другого угла.

б) Если сумма двух произвольных натуральных чисел делится нацело на 4, то если посчитать сумму цифр каждого числа и полученные результаты сложить, то результат будет делиться на 4.

в) Если в пространстве прямая a перпендикулярна плоскости α, прямая b перпендикулярна плоскости α, то $a||b$.

г) Если сложить два произвольных рациональных числа, то результат всегда будет числом рациональным.

д) Сумма двух монотонно возрастающих определенных на промежутке функций всегда монотонно возрастающая функция на данном промежутке.

Решение:

а) да, верно. Например, треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов;

б) нет, неверно. Контрпример: числа 12 и 16, их суммы цифр равны 3 и 7 соответственно, если их сложить получится 10, которое не делится на 4;

в) да, верно. Теорема из курса геометрии 10 класса;

г) да, верно. Раз числа рациональные, их можно представить в виде несократимых дробей с целым числителем и натуральным знаменателем $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, тогда их сумма - рациональное число (сложим дроби и в случае необходимости сократим числитель и знаменатель, получим представление рационального числа);

д) да, верно. Если $f(x)$ и $g(x)$ - монотонно возрастающие функции на промежутке, то для любых двух аргументов с этого промежутка x_1 и x_2 выполняется условие: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(x_1) < g(x_2)$, сложим эти неравенства получим, что функция $f(x) + g(x)$ также является монотонно возрастающей функцией.

Ответ: а, в, г, д

Задание №2 из 10 (11 кл). Коты в мешке

Вариант 1 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 45% до 48%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность. Значит эта разность минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 10% (55% - 45%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot 10 = 20$. В этом случае количество чёрных котов не больше, чем $20 \cdot \frac{45}{100} = 9$. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 9

Вариант 2 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 46% до 48%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность. Значит эта разность минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 8% (54% - 46%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot \frac{100}{8} = 25$. Но 25 - нечётное, тогда минимальное количество котов – 26. В этом случае количество чёрных котов не больше, чем $26 \cdot \frac{46}{100} = 11,96$. То есть не меньше 12. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 12

Вариант 3 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 46% до 47%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность. Значит эта разность минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 8% (54% - 46%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot \frac{100}{8} = 25$. Но 25 - нечётное, тогда минимальное количество котов – 26. В этом случае количество чёрных котов не больше, чем $26 \cdot \frac{46}{100} = 11,96$. То есть не меньше 12. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 12

Вариант 4 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 45% до 49%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность. Значит эта разность минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 10% (55% - 45%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot 10 = 20$. В этом случае количество чёрных котов не больше, чем $20 \cdot \frac{45}{100} = 9$. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 9

Вариант 5 задания №2

Какое наименьшее количество чёрных котов может лежать в мешке, если всего котов чётное количество и доля черных лежит в диапазоне от 45% до 47%?

Решение:

Разность между количеством чёрных и остальных котов – чётное число. Так как в сумме котов чётное, а разность и сумма двух целых чисел имеют одинаковую чётность. Значит эта разность минимум 2 кота. Эти 2 кота составляют максимум 10% (55% - 45%). Тогда минимальное количество котов – $2 \cdot 10 = 20$. В этом случае количество чёрных котов не больше, чем $20 \cdot \frac{45}{100} = 9$. Осталось заметить, что этот случай возможен.

Ответ: 9

Задание №3 из 10 (11 кл). Углы в треугольнике

Вариант 1 задания №3

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 53°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n°$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180°$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180° - n°$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180° - \angle AA_1B = n°$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180° - n°$. Подставив $n = 53$, получаем, что ответ $127°$.

Ответ: 127

Вариант 2 задания №3

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 76°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n°$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180°$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180° - n°$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180° - \angle AA_1B = n°$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180° - n°$. Подставив $n = 76$, получаем, что ответ $104°$.

Ответ: 104

Вариант 3 задания №3

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 96°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n°$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180°$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180° - n°$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180° - \angle AA_1B = n°$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180° - n°$. Подставив $n = 96$, получаем, что ответ $84°$.

Ответ: 84

Вариант 4 задания №3

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 75°$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n^\circ$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180^\circ$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180^\circ - n^\circ$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180^\circ - \angle AA_1B = n^\circ$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180^\circ - n^\circ$. Подставив $n = 75$, получаем, что ответ 105°.

Ответ: 105

Вариант 5 задания №3

В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. На сторонах AC и AB нашлись точки P и Q так, что $\angle PA_1C = \angle QA_1B = \angle BAC$. Известно, что $\angle BPC = 69^\circ$. Найдите угол BQC, ответ дайте в градусах.

Решение:

Решим задачу в общем случае, если $\angle BPC = n^\circ$. Заметим, что $\angle PA_1B + \angle PAB = 180^\circ$, откуда получаем, что ABA_1P - вписанный четырёхугольник и $\angle AA_1B = \angle APB = 180^\circ - n^\circ$. Аналогично AQA_1C - вписанный четырёхугольник и $\angle AQC = \angle AA_1C = 180^\circ - \angle AA_1B = n^\circ$. Отсюда получаем, что $\angle BQC = 180^\circ - n^\circ$. Подставив $n = 69$, получаем, что ответ 111°.

Ответ: 111

Задание №4 из 10 (11 кл). Особые множители

Вариант 1 задания №4

Для натуральных чисел a и bизвестно, что $2a+5b$ делится нацело на 177, ab также делится нацело на 177. Чему равно наименьшее значение $3a+2b$?

Решение:

Заметим, что $177 = 3 \cdot 59$, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 177, то одно из чисел должно делиться на 59 и одно из чисел делится на 3. Так как $2a+5b$ также делится на 177, и одно из слагаемых делится на 59, то другое слагаемое также делится на 59. Аналогично с 3. Получаем, что a и b должны нацело делиться на 177, отсюда наименьшее значение равно $3a+2b = 3 \cdot 177 + 2 \cdot 177 = 885$.

Ответ: 885

Вариант 2 задания №4

Для натуральных чисел a и b известно, что $2a+7b$ делится нацело на 129, ab также делится нацело на 129. Чему равно наименьшее значение $3a+2b$?

Решение:

Заметим, что $129 = 3 \cdot 43$, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 129, то одно из чисел должно делиться на 43 и одно из чисел делится на 3. Так как $2a+7b$ также делится на 129, и одно из слагаемых делится на 43, то другое слагаемое также делится на 43. Аналогично с 3. Получаем, что a и b должны нацело делиться на 129, отсюда наименьшее значение равно $3a+2b = 3 \cdot 129 + 2 \cdot 129 = 645$.

Ответ: 645

Вариант 3 задания №4

Для натуральных чисел a и b известно, что $4a+11b$ делится нацело на 111, ab также делится нацело на 111. Чему равно наименьшее значение $6a+b$?

Решение:

Заметим, что $111 = 3 \cdot 37$, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 111, то одно из чисел должно делиться на 37 и одно из чисел делится на 3. Так как $4a+11b$ также делится на 111, и одно из слагаемых делится на 37, то другое слагаемое также делится на 37. Аналогично с 3. Получаем, что a и b должны нацело делиться на 111, отсюда наименьшее значение равно $6a+b = 6 \cdot 111 + 111 = 777$.

Ответ: 777

Вариант 4 задания №4

Для натуральных чисел a и b известно, что $3a+4b$ делится нацело на 91, ab также делится нацело на 91. Чему равно наименьшее значение $3a+5b$?

Решение:

Заметим, что $91 = 7 \cdot 13$, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 91, то одно из чисел должно делиться на 13 и одно из чисел делится на 7. Так как $3a+4b$ также делится на 91, и одно из слагаемых делится на 13, то другое слагаемое также делится на 13. Аналогично с 7. Получаем, что a и b должны нацело делиться на 91, отсюда наименьшее значение равно $3a + 5b = 3 \cdot 91 + 5 \cdot 91 = 728$.

Ответ: 728

Вариант 5 задания №4

Для натуральных чисел a и b известно, что $2a+7b$ делится нацело на 143, ab также делится нацело на 143. Чему равно наименьшее значение $4a + 2b$?

Решение:

Заметим, что $143 = 11 \cdot 13$, откуда получаем, что раз ab делится нацело на 143, то одно из чисел должно делиться на 13 и одно из чисел делится на 11. Так как $2a+7b$ также делится на 143, и одно из слагаемых делится на 13, то другое слагаемое также делится на 13. Аналогично с 11. Получаем, что a и b должны нацело делиться на 143, отсюда наименьшее значение равно $4a+2b = 4\cdot143+2\cdot143 = 858$.

Ответ: 858

Задание №5 из 10 (11 кл). Рыцари и лжецы – 11

Вариант 1 задания №5

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2021 островитянина, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем хотя бы у одного из моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N + 1$ островитянин. Ответ: 2N,

Решение:

Все сразу не могут быть рыцарями, потому что тот, у кого меньше всего друзей, в этом случае будет говорить неправду, а такое невозможно. Пример на 2N: 0, 1, 2, ..., 2N-1, N (так они стоят в круг) Дружбы устроены так: первый не дружит ни с кем, 2N-й дружит со всеми остальными, далее убираем их из рассмотрения, второй не дружит ни с кем из оставшихся, 2N-1-й дружит со всеми остальными, итд, в конце N-1-й не дружит с N-м и с 2N+1-м, а N-й дружит с 2N+1-м), в этом примере врёт только тот, у кого в этой компании нет друзей, все остальные говорят правду.

Ответ: 2020

Вариант 2 задания №5

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2019 островитянина, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем хотя бы у одного из моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N + 1$ островитянин. Ответ: 2N,

Решение:

Все сразу не могут быть рыцарями, потому что тот, у кого меньше всего друзей, в этом случае будет говорить неправду, а такое невозможно. Пример на 2N: 0, 1, 2, ..., 2N-1, N (так они стоят в круг) Дружбы устроены так: первый не дружит ни с кем, 2N-й дружит со всеми остальными, далее убираем их из рассмотрения, второй не дружит ни с кем из оставшихся, 2N-1-й дружит со всеми остальными, итд, в конце N-1-й не дружит с N-м и с 2N+1-м, а N-й дружит с 2N+1-м), в этом примере врёт только тот, у кого в этой компании нет друзей, все остальные говорят правду.

Ответ: 2018

Вариант 3 задания №5

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2023 островитянина, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем хотя бы у одного из моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N+1$ островитянин. Ответ: 2N,

Решение:

Все сразу не могут быть рыцарями, потому что тот, у кого меньше всего друзей, в этом случае будет говорить неправду, а такое невозможно. Пример на 2N: 0, 1, 2, ..., 2N-1, N (так они стоят в круг) Дружбы устроены так: первый не дружит ни с кем, 2N-й дружит со всеми остальными, далее убираем их из рассмотрения, второй не дружит ни с кем из оставшихся, 2N-1-й дружит со всеми остальными, итд, в конце N-1-й не дружит с N-м и с 2N+1-м, а N-й дружит с 2N+1-м), в этом примере врёт только тот, у кого в этой компании нет друзей, все остальные говорят правду.

Ответ: 2022

Вариант 4 задания №5

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2017 островитянина, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем хотя бы у одного из моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N+1$ островитянин. Ответ: 2N,

Решение:

Все сразу не могут быть рыцарями, потому что тот, у кого меньше всего друзей, в этом случае будет говорить неправду, а такое невозможно. Пример на 2N: 0, 1, 2, ..., 2N-1, N (так они стоят в круг) Дружбы устроены так: первый не дружит ни с кем, 2N-й дружит со всеми остальными, далее убираем их из рассмотрения, второй не дружит ни с кем из оставшихся, 2N-1-й дружит со всеми остальными, итд, в конце N-1-й не дружит с N-м и с 2N+1-м, а N-й дружит с 2N+1-м), в этом примере врёт только тот, у кого в этой компании нет друзей, все остальные говорят правду.

Ответ: 2016

Вариант 5 задания №5

На острове живут рыцари и лжецы. Некоторые из них дружат. В круг встала компания из 2025 островитянина, после чего каждый из них заявил: «У меня в этой компании больше друзей, чем хотя бы у одного из моих соседей». Какое максимальное количество рыцарей может быть в этой компании?

Решение:

Решим задачу в общем виде для $2N+1$ островитянин. Ответ: 2N,

Решение:

Все сразу не могут быть рыцарями, потому что тот, у кого меньше всего друзей, в этом случае будет говорить неправду, а такое невозможно. Пример на 2N: 0, 1, 2, ..., 2N-1, N (так они стоят в круг) Дружбы устроены так: первый не дружит ни с кем, 2N-й дружит со всеми остальными, далее убираем их из рассмотрения, второй не дружит ни с кем из оставшихся, 2N-1-й дружит со всеми остальными, итд, в конце N-1-й не дружит с N-м и с 2N+1-м, а N-й дружит с 2N+1-м), в этом примере врёт только тот, у кого в этой компании нет друзей, все остальные говорят правду.

Ответ: 2024

Задание №6 из 10 (11 кл). Что-то про функцию

Вариант 1 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-5x+16$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенсто $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-5(t+2)+16$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-t+10$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$. Подставляем, $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+10=9\frac{3}{4}$.

Ответ: 9,75 при значении аргумента 0,5.

Вариант 2 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-6x+19$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-6(t+2)+19$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-2t+11$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=1$. Подставляем, получаем 10.

Ответ: 10 при значении аргумента 1

Вариант 3 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-6x+18$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-6(t+2)+18$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2-2t+10$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=1$. Подставляем, получаем 9.

Ответ: 9 при значении аргумента 1.

Вариант 4 задания №6

Известно, что $f(x-2)=x^2-4x+15$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x=t+2$, получим: $f(t+2-2)=(t+2)^2-4(t+2)+15$. После раскрытия скобок имеем: $f(t)=t^2+11$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t=-\frac{b}{2a}=0$. Подставляем, получаем 11.

Ответ: 11 при значении аргумента 0

Вариант 5 задания №6

Известно, что $f(x-2) = x^2 - 7x + 17$. Найдите наименьшее значение $f(x)$. При каком значении аргумента оно достигается?

Решение:

Подставим в данное равенство $x = t + 2$, получим: $f(t+2-2) = (t+2)^2 - 7(t+2) + 17$. После раскрытия скобок имеем: $f(t) = t^2 - 3t + 7$. Наименьшее значение квадратного трёхчлена получается при $t = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$. Подставляем, $\frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 7 = 4\frac{3}{4}$.

Ответ: 4,75 при значении аргумента 1,5

Задание №7 из 10 (11 кл). Жук и параллелепипед

Вариант 1 задания №7

Жук стоит в вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 5$, $AD = 12$ $AA_1 = 18$. Жуку нужно проползти по поверхности параллелепипеда кратчайшим путем в вершину C_1.

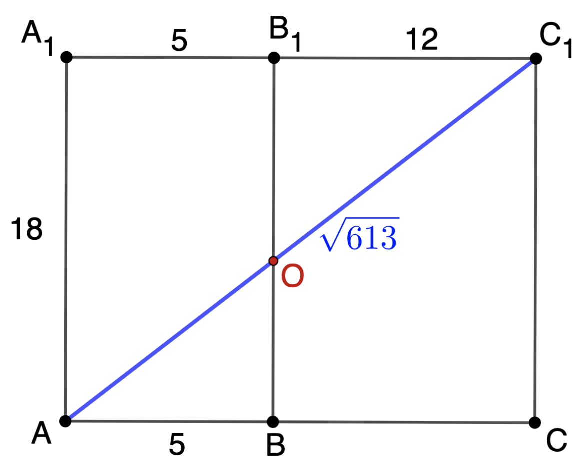
а) В каком отношении точка пересечения пути с ребром разделила это ребро (разделите большую величину на меньшую, в случае, если путь жука пересекает несколько ребер, посчитайте каждое отношение, разделив большее на меньшее, и в ответ запишите сумму этих отношений. В случае, если жук должен проползти по какому-то ребру, то отношение в таком случае считайте равным 1)?

б) Найдите квадрат длины такого пути жука.

Решение:

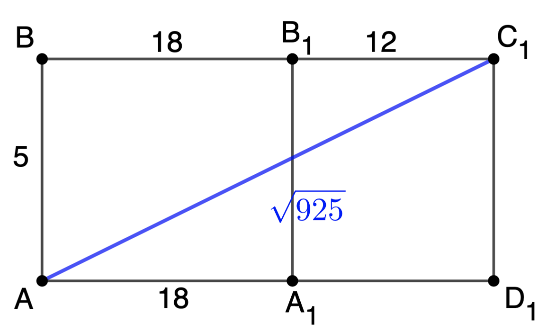
Для того, чтобы найти кратчайший путь жука сделаем всевозможные развёртки нашего параллелепипеда, тогда его путь по граням превращается в ломанную в плоских картинках.

Сделаем первую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C):



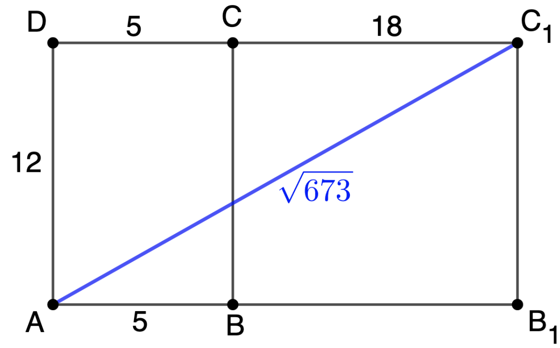
Для такой развёртки кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является прямой отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника AA_1C_1 равна $\sqrt{613}$. Заметим, что такой путь делит ребро BB_1 в отношении $B_1O : B_1O = 12 : 5 = 2,4$ из подобия треугольников ABO и C_1B_1O.

Сделаем вторую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ABC_1 равна $\sqrt{925}$. Этот путь длиннее, чем из первой развертки.

Сделаем третью развёртку параллелепипеда (грани $ABCD$ и BB_1C_1C):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ADC_1 равна $\sqrt{673}$. Этот путь длиннее, чем из первой развёртки.

Получаем, что кратчайшим путем был путь, когда жук пересекал ребро A_1B_1 из первой развертки. Квадрат длины такого пути равен 613, он пересекал лишь одно ребро и делил его в отношении 2,4.

Ответ: а) 2,4; б) 613

Вариант 2 задания №7

Жук стоит в вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 8$, $AD = 12$ $AA_1 = 14$. Жуку нужно проползти по поверхности параллелепипеда кратчайшим путем в вершину C_1.

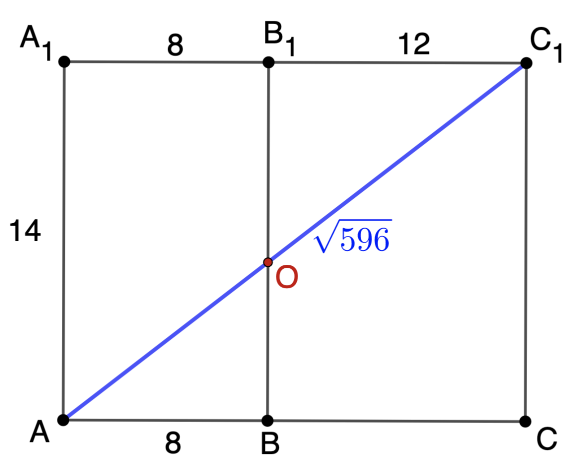
а) В каком отношении точка пересечения пути с ребром разделила это ребро (разделите большую величину на меньшую, в случае, если путь жука пересекает несколько ребер, посчитайте каждое отношение, разделив большее на меньшее, и в ответ запишите сумму этих отношений. В случае, если жук должен проползти по какому-то ребру, то отношение в таком случае считайте равным 1)?

б) Найдите квадрат длины такого пути жука.

Решение:

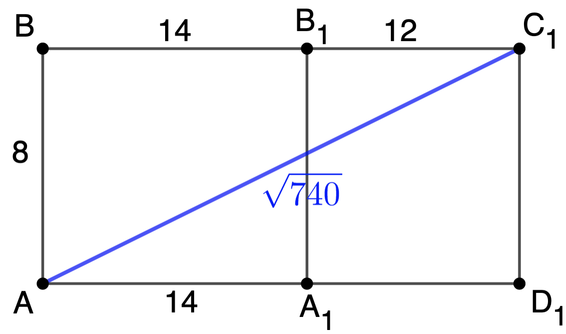
Для того, чтобы найти кратчайший путь жука сделаем всевозможные развёртки нашего параллелепипеда, тогда его путь по граням превращается в ломанную в плоских картинках.

Сделаем первую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C):



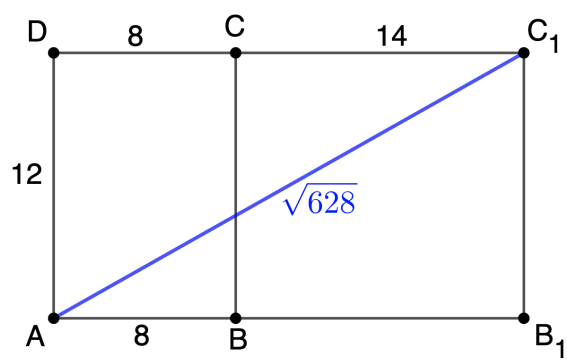
Для такой развёртки кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является прямой отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника AA_1C_1 равна $\sqrt{596}$. Заметим, что такой путь делит ребро BB_1 в отношении $B_1O : B_1O = 12 : 8 = 1,5$ из подобия треугольников ABO и C_1B_1O.

Сделаем вторую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ABC_1 равна $\sqrt{740}$. Этот путь длиннее, чем из первой развертки.

Сделаем третью развёртку параллелепипеда (грани $ABCD$ и BB_1C_1C):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ADC_1 равна $\sqrt{628}$. Этот путь длиннее, чем из первой развёртки.

Получаем, что кратчайшим путем был путь, когда жук пересекал ребро A_1B_1 из первой развертки. Квадрат длины такого пути равен 596, он пересекал лишь одно ребро и делил его в отношении 1,5.

Ответ: а) 1,5; б) 596

Вариант 3 задания №7

Жук стоит в вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 4$, $AD = 5$ $AA_1 = 6$. Жуку нужно проползти по поверхности параллелепипеда кратчайшим путем в вершину C_1.

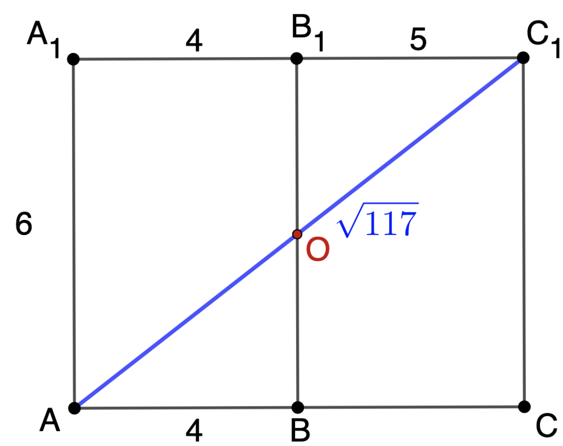
а) В каком отношении точка пересечения пути с ребром разделила это ребро (разделите большую величину на меньшую, в случае, если путь жука пересекает несколько ребер, посчитайте каждое отношение, разделив большее на меньшее, и в ответ запишите сумму этих отношений. В случае, если жук должен проползти по какому-то ребру, то отношение в таком случае считайте равным 1)?

б) Найдите квадрат длины такого пути жука.

Решение:

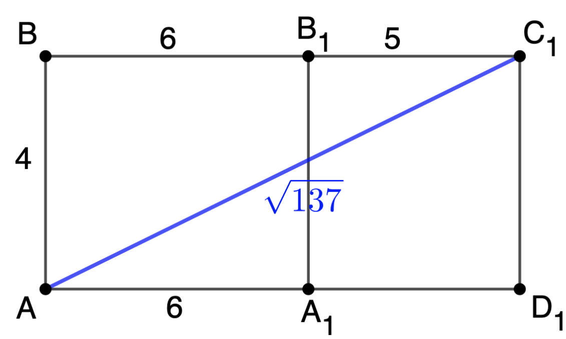
Для того, чтобы найти кратчайший путь жука сделаем всевозможные развёртки нашего параллелепипеда, тогда его путь по граням превращается в ломанную в плоских картинках.

Сделаем первую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C):



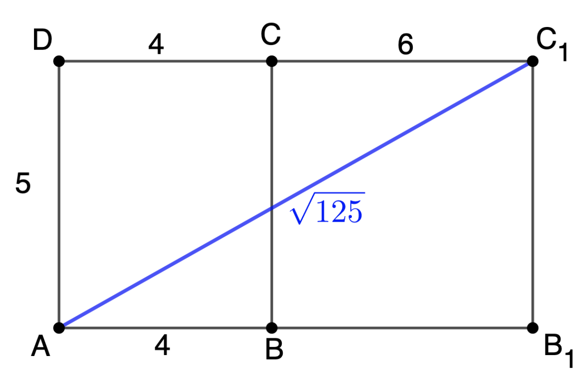
Для такой развёртки кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является прямой отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника AA_1C_1 равна $\sqrt{117}$. Заметим, что такой путь делит ребро BB_1 в отношении $B_1O : B_1O = 5 : 4 = 1,25$ из подобия треугольников ABO и C_1B_1O.

Сделаем вторую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ABC_1 равна $\sqrt{137}$. Этот путь длиннее, чем из первой развертки.

Сделаем третью развёртку параллелепипеда (грани $ABCD$ и BB_1C_1C):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ADC_1 равна $\sqrt{125}$. Этот путь длиннее, чем из первой развёртки.

Получаем, что кратчайшим путем был путь, когда жук пересекал ребро A_1B_1 из первой развертки. Квадрат длины такого пути равен 117, он пересекал лишь одно ребро и делил его в отношении 1,25.

Ответ: а) 1,25; б) 117

Вариант 4 задания №7

Жук стоит в вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 4$, $AD = 5$ $AA_1 = 10$. Жуку нужно проползти по поверхности параллелепипеда кратчайшим путем в вершину C_1.

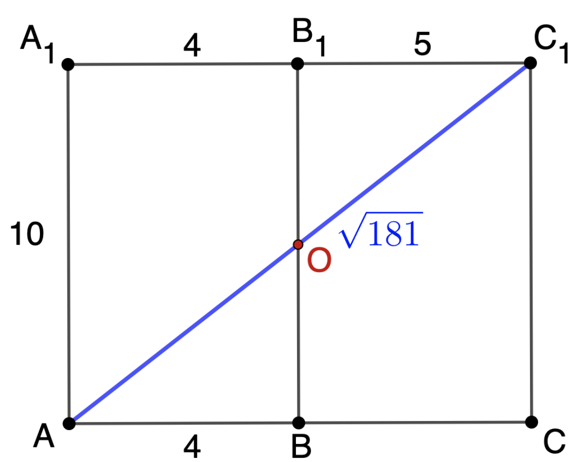
а) В каком отношении точка пересечения пути с ребром разделила это ребро (разделите большую величину на меньшую, в случае, если путь жука пересекает несколько ребер, посчитайте каждое отношение, разделив большее на меньшее, и в ответ запишите сумму этих отношений. В случае, если жук должен проползти по какому-то ребру, то отношение в таком случае считайте равным 1)?

б) Найдите квадрат длины такого пути жука.

Решение:

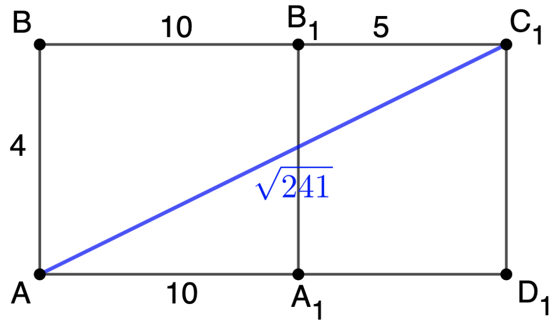
Для того, чтобы найти кратчайший путь жука сделаем всевозможные развёртки нашего параллелепипеда, тогда его путь по граням превращается в ломанную в плоских картинках.

Сделаем первую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C):



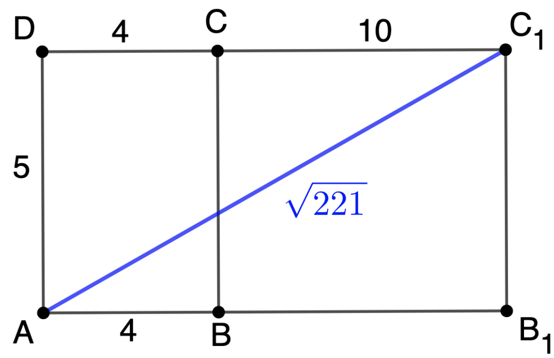
Для такой развёртки кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является прямой отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника AA_1C_1 равна $\sqrt{181}$. Заметим, что такой путь делит ребро BB_1 в отношении $B_1O : B_1O = 5 : 4 = 1,25$ из подобия треугольников ABO и C_1B_1O.

Сделаем вторую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ABC_1 равна $\sqrt{241}$. Этот путь длиннее, чем из первой развертки.

Сделаем третью развёртку параллелепипеда (грани $ABCD$ и BB_1C_1C):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ADC_1 равна $\sqrt{221}$. Этот путь длиннее, чем из первой развёртки.

Получаем, что кратчайшим путем был путь, когда жук пересекал ребро A_1B_1 из первой развертки. Квадрат длины такого пути равен 117, он пересекал лишь одно ребро и делил его в отношении 1,25.

Ответ: а) 1,25; б) 181

Вариант 5 задания №7

Жук стоит в вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 5$, $AD = 8$ $AA_1 = 10$. Жуку нужно проползти по поверхности параллелепипеда кратчайшим путем в вершину C_1.

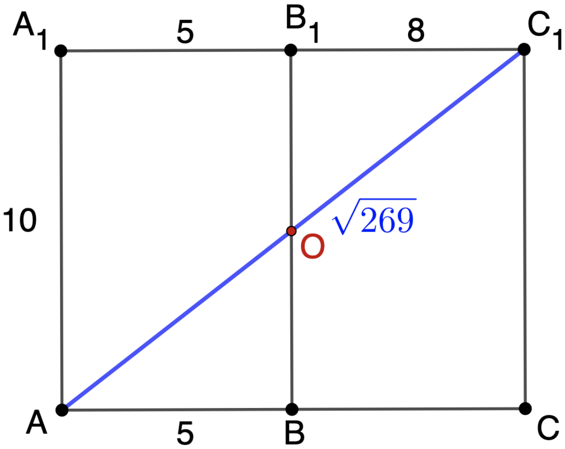
а) В каком отношении точка пересечения пути с ребром разделила это ребро (разделите большую величину на меньшую, в случае, если путь жука пересекает несколько ребер, посчитайте каждое отношение, разделив большее на меньшее, и в ответ запишите сумму этих отношений. В случае, если жук должен проползти по какому-то ребру, то отношение в таком случае считайте равным 1)?

б) Найдите квадрат длины такого пути жука.

Решение:

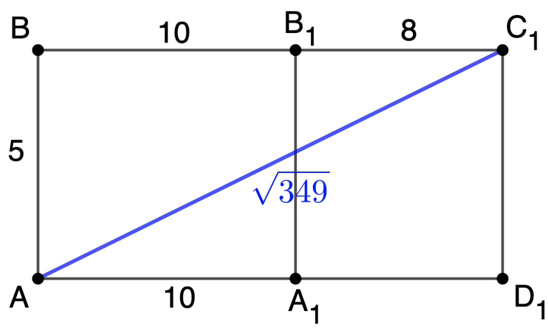
Для того, чтобы найти кратчайший путь жука сделаем всевозможные развёртки нашего параллелепипеда, тогда его путь по граням превращается в ломанную в плоских картинках.

Сделаем первую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C):



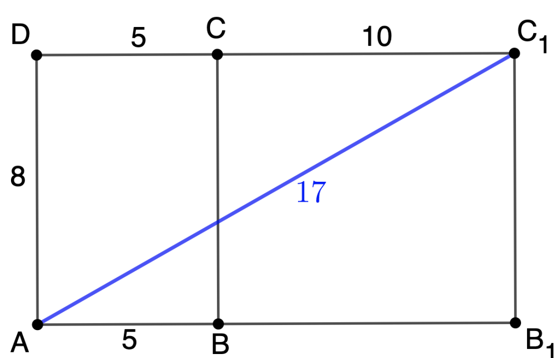
Для такой развёртки кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является прямой отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника AA_1C_1 равна $\sqrt{269}$. Заметим, что такой путь делит ребро BB_1 в отношении $B_1O : B_1O = 8 : 5 = 1,6$ из подобия треугольников ABO и C_1B_1O.

Сделаем вторую развёртку параллелепипеда (грани ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ABC_1 равна $\sqrt{349}$. Этот путь длиннее, чем из первой развертки.

Сделаем третью развёртку параллелепипеда (грани $ABCD$ и BB_1C_1C):



Для такой кратчайшим путем, соединяющим точки A и C_1 является отрезок AC_1, длина которого по теореме Пифагора для треугольника ADC_1 равна $\sqrt{289} = 17$. Этот путь длиннее, чем из первой развёртки.

Получаем, что кратчайшим путем был путь, когда жук пересекал ребро A_1B_1 из первой развертки. Квадрат длины такого пути равен 269, он пересекал лишь одно ребро и делил его в отношении 1,25.

Ответ: а) 1,6; б) 269

Задание №8 из 10 (11 кл). Минимизация выражения

Вариант 1 задания №8

Какое наименьшее значение может принимать выражение $4x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2xy + x + y + 1$ при действительных числах x и y?

Решение:

Выделим полные квадраты: $(2xy - \frac{1}{2})^2 + (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$. Так как квадрат любого действительного числа не меньше 0, то выражение не меньше $\frac{1}{4}$, причем равно $\frac{1}{4}$, когда $x = y = -\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,25

Вариант 2 задания №8

Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 4$ при действительных числах x и y?

Решение:

Выделим полные квадраты: $(xy-1)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+1$. Так как квадрат любого действительного числа не меньше 0, то выражение не меньше 1, причем равно 1, когда $x = y = -1$.

Ответ: 1

Вариант 3 задания №8

Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2y^2 + x^2 + y^2 - xy + x + 2y + 2$ при действительных числах x и y?

Решение:

Выделим полные квадраты: $(xy-\frac{1}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2+(y+1)^2+\frac{1}{2}$. Так как квадрат любого действительного числа не меньше 0, то выражение не меньше $\frac{1}{2}$, причем равно $\frac{1}{2}$, когда $x = -\frac{1}{2}$ и $y = -1$.

Ответ: 0,5

Вариант 4 задания №8

Какое наименьшее значение может принимать выражение $4x^2y^2 + 4x^2 + y^2 - 4xy + 4x + 2y + 2$ при действительных числах x и y?

Решение:

Выделим полные квадраты: $(2xy - 1)^2 + (2x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 1$. Так как квадрат любого действительного числа не меньше 0, то выражение не меньше -1, причем равно -1, когда $x = -\frac{1}{2}$ и $y = -1$.

Ответ: -1

Вариант 5 задания №8

Какое наименьшее значение может принимать выражение $4x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2 - 2xy + 4x + 4y + 1$ при действительных числах x и y?

Решение:

Выделим полные квадраты: $(2xy-\frac{1}{2})^2+(2x+1)^2+(2y+1)^2-\frac{5}{4}$. Так как квадрат любого действительного числа не меньше 0, то выражение не меньше $-\frac{5}{4}$, причем равно $-\frac{5}{4}$, когда $x=y=-\frac{1}{2}$.

Ответ: -1,25

Задание №9 из 10 (11 кл). Радикальная сумма

Вариант 1 задания №9

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{3x} + \sqrt{3y} = \sqrt{168}$

Решение:

Разделим на $\sqrt{3}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{14}$. Заметим, что $56 \geq x \geq 0$ и $56 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 56 - 4\sqrt{14y} + y$. Получаем, что $\sqrt{14y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 14$, либо $y = 56$.

Итого получаем три решения: $(0; 56)$, $(56; 0)$, $(14; 14)$.

Ответ: 3

Вариант 2 задания №9

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{3x}+\sqrt{3y} = \sqrt{180}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{3}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{15}$. Заметим, что $60 \geq x \geq 0$ и $60 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 60 - 4\sqrt{15y} + y$. Получаем, что $\sqrt{15y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 15$, либо $y = 60$.

Итого получаем три решения: $(0; 60)$, $(60; 0)$, $(15; 15)$.

Ответ: 3

Вариант 3 задания №9

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{5x}+\sqrt{5y} = \sqrt{260}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{5}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{13}$. Заметим, что $52 \geq x \geq 0$ и $52 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 52 - 4\sqrt{13y} + y$. Получаем, что $\sqrt{13y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 13$, либо $y = 52$.

Итого получаем три решения: $(0; 52)$, $(52; 0)$, $(13; 13)$.

Ответ: 3

Вариант 4 задания №9

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{2x}+\sqrt{2y} = \sqrt{252}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{2}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{14}$. Заметим, что $126 \geq x \geq 0$ и $126 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 126 - 6\sqrt{14y} + y$. Получаем, что $\sqrt{14y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 14$, либо $y = 56$, либо $y = 126$.

Итого получаем четыре решения: $(0; 126)$, $(14; 56)$, $(56; 14)$, $(126; 0)$.

Ответ: 4

Вариант 5 задания №9

Найти количество целых решений уравнения $\sqrt{2x}+\sqrt{2y} = \sqrt{270}$. Напомним, что решением данного уравнения будет являться пара чисел $(x; y)$.

Решение:

Разделим на $\sqrt{2}$:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{15}$. Заметим, что $135 \geq x \geq 0$ и $135 \geq y \geq 0$, после этого выразим:

$x = 135 - 6\sqrt{15y} + y$. Получаем, что $\sqrt{15y}$ - рациональное число. Отсюда перебором получаем, что либо $y = 0$, либо $y = 15$, либо $y = 60$, либо $y = 135$.

Итого получаем четыре решения: $(0; 135)$, $(15; 60)$, $(60; 15)$, $(135; 0)$.

Ответ: 4

Задание №10 из 10 (11 кл). Полный квадрат целого числа

Вариант 1 задания №10

При каких натуральных n число $n^3 - 5n^2 + 9n - 6$ является полным квадратом целого числа m? Чему равно при этом m? В поле ниже введите число n (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел n): В поле ниже введите число m (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел m):

Решение:

Разложим на множители $n^3 - 5n^2 + 9n - 6 = (n-2)(n^2 - 3n + 3)$. Заметим, что $n^2 - 3n + 3 = (n-2)(n-1) + 1$, то есть $n^2 - 3n + 3$ и $n - 2$ – это взаимно простые числа. Раз их произведение равно квадрату целого числа, то возможны варианты:

1. Одна из скобок равна 0: $n = 2$, $m = 0$.

2. Каждая из скобок $(n-2)$ и $n^2 - 3n + 3$ - полные квадраты, но заметим, что при натуральных $n > 2$ выполняется:

$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 3n + 3 < n^2 - 2n + 1$, то есть $(n-2)^2 < n^2 - 3n + 3 < (n-1)^2$, то есть $n^2 - 3n + 3$ не может быть полным квадратом.

При $n = 1$ получаем, что $n^3 - 5n^2 + 9n - 6 = -1$ не является квадратом целого числа. Случай $n = 2$ мы уже рассмотрели.

Ответ: $n = 2$, $m = 0$.

Вариант 2 задания №10

При каких натуральных n число $n^3 - 3n^2 + 4n - 2$ является полным квадратом целого числа m? Чему равно при этом m? В поле ниже введите число n (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел n): В поле ниже введите число m (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел m):

Решение:

Разложим на множители $n^3 - 3n^2 + 4n - 2 = (n-1)(n^2 - 2n + 2)$. Заметим, что $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$, то есть $n^2 - 2n + 2$ и $n - 1$ – это взаимно простые числа. Раз их произведение равно квадрату целого числа, то возможны варианты:

1. Одна из скобок равна 0: $n = 1$, $m = 0$.

2. Каждая из скобок $(n-1)$ и $n^2 - 2n + 2$ - полные квадраты, но заметим, что при натуральных $n > 1$ выполняется:

$n^2 - 2n + 1 < n^2 - 2n + 2 < n^2$, то есть $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$, то есть $n^2 - 2n + 2$ не может быть полным квадратом.

Случай $n = 1$ мы уже рассмотрели.

Ответ: $n = 1$, $m = 0$

Вариант 3 задания №10

При каких натуральных n число $n^3 - 6n^2 + 13n - 10$ является полным квадратом целого числа m? Чему равно при этом m? В поле ниже введите число n (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел n): В поле ниже введите число m (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел m):

Решение:

Разложим на множители $n^3-6n^2+13n-10=(n-2)(n^2-4n+5)$. Заметим, что $n^2-4n+5=(n-2)^2+1$, то есть n^2-4n+5 и $n-2$ – это взаимно простые числа. Раз их произведение равно квадрату целого числа, то возможны варианты:

1. Одна из скобок равна 0: $n=2$, $m=0$.

2. Каждая из скобок $(n-2)$ и n^2-4n+5 - полные квадраты, но заметим, что при натуральных $n>2$ выполняется:

$n^2-4n+4<n^2-4n+5<n^2-2n+1$, то есть $(n-2)^2<n^2-4n+5<(n-1)^2$, то есть n^2-4n+5 не может быть полным квадратом.

Если $n=1$, то выражение $n^3-6n^2+13n-10=-2$ не является квадратом целого числа.

Случай $n=2$ мы уже рассмотрели.

Ответ: $n=2$, $m=0$

Вариант 4 задания №10

При каких натуральных n число $n^3-8n^2+22n-21$ является полным квадратом целого числа m? Чему равно при этом m? В поле ниже введите число n (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел n): В поле ниже введите число m (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел m):

Решение:

Разложим на множители $n^3-8n^2+22n-21=(n-3)(n^2-5n+7)$. Заметим, что $n^2-5n+7=(n-3)(n-2)+1$, то есть n^2-5n+7 и $n-3$ – это взаимно простые числа. Раз их произведение равно квадрату целого числа, то возможны варианты:

1. Одна из скобок равна 0: $n=3$, $m=0$.

2. Каждая из скобок $(n-1)$ и n^2-5n+7 - полные квадраты, но заметим, что при натуральных $n>3$ выполняется:

$n^2-6n+9<n^2-5n+7<n^2-4n+4$, то есть $(n-3)^2<n^2-5n+7<(n-2)^2$, то есть n^2-5n+7 не может быть полным квадратом.

Если $n=1$, то выражение $n^3-8n^2+22n-21=-6$ не является квадратом целого числа. Если $n=2$, то выражение $n^3-8n^2+22n-21=-1$ не является квадратом целого числа.

Случай $n=3$ мы уже рассмотрели.

Ответ: $n=3$, $m=0$

Вариант 5 задания №10

При каких натуральных n число $n^3-6n^2+10n-5$ является полным квадратом целого числа m? Чему равно при этом m? В поле ниже введите число n (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел n): В поле ниже введите число m (если таких чисел несколько, впишите сумму всех полученных чисел m):

Решение:

Разложим на множители $n^3 - 6n^2 + 10n - 5 = (n-1)(n^2 - 5n + 5)$. Заметим, что $n^2 - 5n + 5 = (n-1)(n-4) + 1$, то есть $n^2 - 5n + 5$ и $n - 1$ – это взаимно простые числа. Раз их произведение равно квадрату целого числа, то возможны варианты:

1. Одна из скобок равна 0: $n = 1$, $m = 0$.

2. Каждая из скобок $(n-1)$ и $n^2 - 5n + 5$ - полные квадраты, но заметим, что при натуральных $n > 4$ выполняется:

$n^2 - 6n + 9 < n^2 - 5n + 5 < n^2 - 4n + 4$, то есть $(n-3)^2 < n^2 - 5n + 5 < (n-2)^2$, то есть $n^2 - 5n + 5$ не может быть полным квадратом.

Если $n = 2$, то выражение $n^3 - 6n^2 + 10n - 5 = -1$ не является квадратом целого числа. Если $n = 3$, то выражение $n^3 - 6n^2 + 10n - 5 = -2$ не является квадратом целого числа.

Случай $n = 1$ мы уже рассмотрели.

Ответ: $n = 1$, $m = 0$