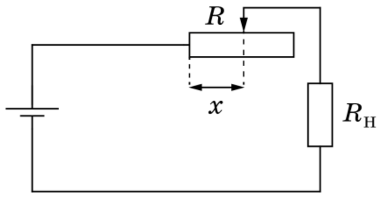
Задача 9.1. Термостат. В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (см. рис.). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента $R_Н$ в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x - это доля длины реостата, включённая в данный момент в цепь.



При температуре внешней среды t_1 = 25ºС для поддержания требуемой температуры ползунок реостата стоит в положении x_1 = 0,65, при t_2 = 20ºС ползунок реостата стоит в положении x_2 = 0,35. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды t_3 = 13ºС? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

Возможное решение

Сопротивление реостата в зависимости от x равно xR.

Сила тока в цепи нагревателя

$$I = \frac{U}{R(x+0{,}25)}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на нагревательном элементе, составит

$$P_H = I^2 R_H = \frac{U^2}{R}\frac{0{,}25}{(x+0{,}25)^2}.$$

При установившейся температуре мощность нагревателя равна мощности тепловых потерь в окружающую среду:

$$P_H = P_{потерь} = \alpha(t_0 - t),$$

где α – постоянный коэффициент, t_0 – температура термостата, t – текущая температура среды.

Применительно к двум известным ситуациям это уравнение теплового баланса даст систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{U^2}{R}\dfrac{0{,}25}{0{,}81} = \alpha(t_0 - 25°\mathrm{C}), \\ \dfrac{U^2}{R}\dfrac{0{,}25}{0{,}36} = \alpha(t_0 - 20°\mathrm{C}). \end{cases}$$

Решая систему, находим t_0 = **29**ºС.

Для третьего случая уравнение баланса запишется в виде:

$$\frac{U^2}{R}\frac{0{,}25}{(x_3+0{,}25)^2} = \alpha(29°\mathrm{C} - 13°\mathrm{C}).$$

Решая это уравнение совместно с любым из уравнений системы, находим x_3 **= 0,2**.

Критерии оценивания

1. Получено правильное выражение для мощности нагрева		2 балла
a) Указана зависимость сопротивления резистора от x	0,5 балла	
b) Получена общая сила тока	0,5 балла	
c) Получено выражение для мощности нагревателя	1 балл	
2. Использовано условие установившейся температуры термостата		1 балл
3. Правильно применено условие баланса мощностей		2 балла
a) Для первого случая	1 балл	
b) Для второго случая	1 балл	
4. Правильно найдена температура термостата		2 балла
5. Правильно применено условие баланса мощностей в третьем случае		1 балл
6. Получено значение для x_3		2 балла
a) Получено правильное выражение	1 балл	
b) Получено правильное значение	1 балл	

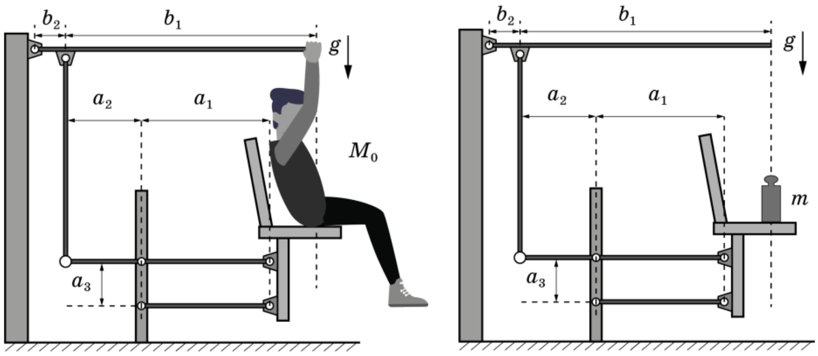
Задача 9.2. Силовой тренажёр. На спортивной площадке установлен тренажёр, схема которого показана на рисунке. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажёра (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз m = 3,7 кг.

Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой M_0 = 86 кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении?

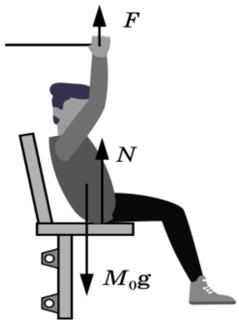
Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчётах:

a_1 = 27,5 см; a_2 = 13,0 см; a_3 = 17,5 см; b_1 = 73,5 см; b_2 = 8,5 см.

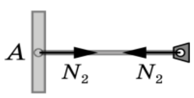
Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



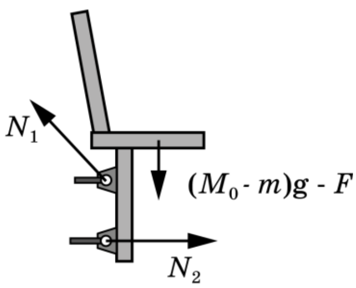
Возможное решение. Рычаги в системе обладают массой. Суммарный момент сил тяжести, связанных с этими массами, компенсируется моментом веса груза массы m. Значит, для их учёта достаточно вычесть массу m из массы человека M_0.



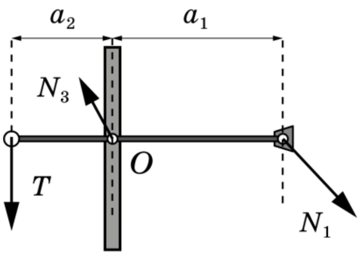
Сила давления человека на кресло меньше силы тяжести на величину силы F.



Рассмотрим силы, действующие на вертикальную и нижнюю горизонтальную штанги. Отметим, что их **силы тяжести мы скомпенсируем уменьшением массы человека**. Из рисунка видно, что сила N_2 может быть только горизонтальной, иначе момент сил относительно т. A будет отличен от нуля (на самом деле её вертикальную составляющую мы учли при уменьшении массы). Аналогично, сила T может быть только вертикальной, иначе момент сил относительно т. B будет отличен от нуля.



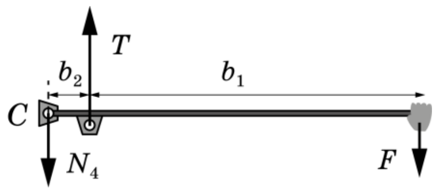
Расставим силы, действующие на кресло. Для равновесия необходимо равенство вертикальных компонент сил:



$$N_{1верт} = (M_0 - m)g - F \qquad (1)$$

Расставим силы, действующие на среднюю горизонтальную штангу. Для равновесия необходимо равенство моментов N_1 и T относительно точки O:

$$Ta_2 = N_{1верт}a_1 \qquad (2)$$



Расставим силы, действующие на верхнюю штангу. Для равновесия необходимо равенство моментов F и T относительно точки C:

$$Tb_2 = F(b_1 + b_2) \qquad (3)$$

Решая совместно все уравнения, полученные из условий равновесия, получаем ответ:

$$F = \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1}(M_0 - m)g \qquad (4)$$

Подставляем численные данные и получаем окончательный ответ: F = 148 Н.

Критерии оценивания

1. Использована идея с исключением моментов сил тяжести внутри механизма путём уменьшения массы человека на m	1 балл
2. Учтено уменьшение силы взаимодействия человека со стулом на F	1 балл
3. Обоснована горизонтальность N_2	1 балл
4. Получено условие равновесия стула (1)	1 балл
5. Использовано условие равновесия средней штанги (2)	1 балл
6. Использовано условие равновесия вертикальной штанги	1 балл
7. Использовано условие равновесия верхней штанги (3)	1 балл
8. Получено выражение для F (4)	2 балла
9. Получен правильный численный ответ	1 балл

Примечание к критериям

1. Если в решении нет идеи из п.1, но моменты сил тяжести внутри механизма учтены в решении, то балл за п.1 выставляется в полной мере. Тогда нет необходимости показывать горизонтальность N_2.

2. Для выполнения п.4, п.5, п.7 может быть записан любой аналог уравнений (1-3).

3. Если в решении не выполнен п.2, то баллы могут быть выставлены только за пункты 1, 3, 5, 6, 7.

Задача 9.3. Торможение шайбы. Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $S_1 = 8$ см от начальной точки, а через 2τ – на расстоянии $S_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение. На шайбу после начального толчка действуют 3 силы: сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения скольжения. В результате, до остановки шайба будет двигаться с ускорением

$$a = \mu g \rightarrow \mu = \frac{a}{g}.$$

Если к моменту 2τ шайба ещё не остановилась, то справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} S_1 = \upsilon\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}, \\ S_2 = \upsilon(2\tau) - \dfrac{a(2\tau)^2}{2}, \end{cases} \qquad (1)$$

где υ - начальная скорость шайбы.

Решая систему, получим:

$$a = \frac{2S_1 - S_2}{\tau^2} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\mu = 0{,}4$$

Если шайба остановилась между τ и 2τ, то справедлива другая система уравнений:

$$\begin{cases} S_1 = \upsilon\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}, \\ S_2 = \dfrac{\upsilon^2}{2a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Из данной системы получаем уравнение для a:

$$2aS_2 = \left(\frac{S_1}{\tau} + \frac{a\tau}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

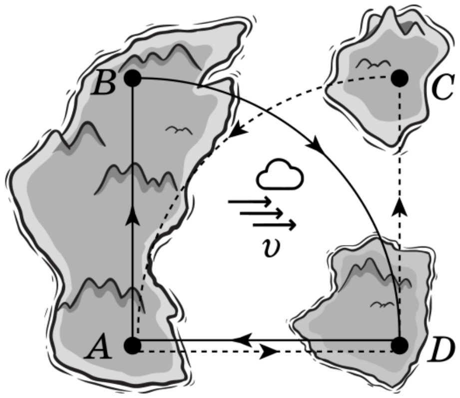
Решением данного уравнения будет соотношение: $a = 16\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Корень с «+» при проверке даёт время остановки, меньшее, чем τ, что противоречит условию.
Корень с «–» даёт время остановки больше 2τ, поэтому этот корень тоже нужно отбросить.

Критерии оценивания

1. Коэффициент трения выражен через ускорение		1 балл
2. Записана система уравнений [1]		1 балл
3. Найдено первое значение $\mu = 0{,}4$		2 балла
a) Получено выражение для a	1 балл	
b) Получено выражение для μ или значение для a	0,5 балла	
c) Получено значение для μ	0,5 балла	
4. Указано, что возможен случай с остановкой до 2τ		1 балл
5. Записана система уравнений [2]		1 балл
6. Получено уравнение [3]		1,5 балла
7. Найдены корни уравнения [3]		1 балл
8. Отброшены оба корня уравнения (3).		1,5 балла

Задача 9.4. Четыре города. Четыре города расположены в вершинах квадрата *ABCD* (см. рис). Параллельно направлению *AD* дует сильный ветер (из *A* в *D*) со скоростью υ. Два одинаковых самолёта вылетают из города *A* и движутся по разным маршрутам: первый по *ABDA*, второй по *ADCA* (*BD* и *CA* – «четвертинки» окружности). Найдите отношение времён движения самолётов по маршрутам $\dfrac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = ?$ Скорость самолёта при отсутствии ветра равна *u*.

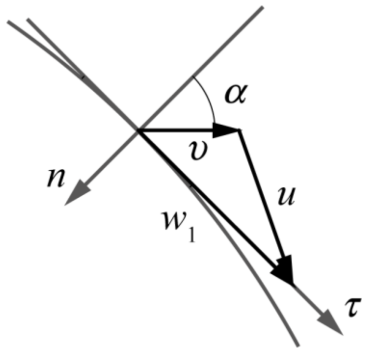


Возможное решение. Сравним времена движения по соответствующим участкам.

1) Так как скорости на участках *AB* и *DC* одинаковы, то и $t_{AB} = t_{DC}$.

2) Время движения на участке *AD* $t_{AD} = \dfrac{l}{u+\upsilon}$, время движения на участке *DA* $t_{DA} = \dfrac{l}{u-\upsilon}$, а выигрыш во времени $t_{DA} - t_{AD} = \Delta t_1 = \dfrac{l}{u-\upsilon} - \dfrac{l}{u+\upsilon} = \dfrac{2l\upsilon}{u^2-\upsilon^2}$

3) Сравним времена движения на *BD* и *CA*. Рассмотрим **маленький** участок Δl на траектории *BD*.

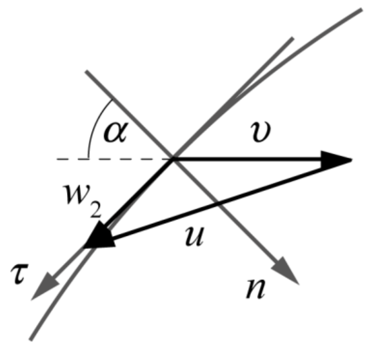


Скорость самолёта относительно земли w_1 равна векторной сумме скорости ветра υ и собственной скорости самолёта *u*. Введём систему координат с осями, направленными вдоль и нормально к траектории в данной точке. Чтобы вектор w_1 был направлен по касательной к траектории, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u_n = -\upsilon_n \\ u_\tau + \upsilon_\tau = w_1 \end{cases} \Rightarrow w_1 = u_\tau + \upsilon_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)$$

Участок малой длины Δl самолёт пролетит за время $\Delta t_{BD1} = \dfrac{\Delta l}{w_1} = \dfrac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)}$.

Аналогично рассмотрим **симметричный первому маленький участок** длиной Δl на траектории *CA*.



Скорость самолёта относительно земли w_1 равна векторной сумме скорости ветра υ (не изменилась) и собственной скорости самолёта *u* (изменилась по направлению). Введём систему координат с осями, направленными вдоль и нормально к траектории в данной точке. Чтобы вектор w_2 был направлен по касательной к траектории, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u_n = -\upsilon_n \\ u_\tau - \upsilon_\tau = w_2 \end{cases} \Rightarrow w_2 = u_\tau - \upsilon_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha).$$

Участок малой длины Δl самолёт пролетит за время $\Delta t_{CA1} = \dfrac{\Delta l}{w_2} = \dfrac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha)}$.

Разность времён прохождения малых участков:

$$\Delta t_{BD1} - \Delta t_{CA1} = \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)} - \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha)} =$$

$$\Delta l \frac{(\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon \sin(\alpha)) - (\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha))}{u^2 - u_n^2 - \upsilon^2 \sin^2(\alpha)}.$$

Учтём, что ${u_n}^2 = {\upsilon_n}^2$, $\upsilon^2 \sin^2(\alpha) = \upsilon_\tau^2$, а $\upsilon_\tau^2 + \upsilon_n^2 = \upsilon^2$, следовательно,

$$\Delta t_{BD1} - \Delta t_{CA1} = \frac{-2\upsilon \Delta l \sin(\alpha)}{u^2 - \upsilon^2}. \qquad (1)$$

Отметим, что $\Delta l \sin(\alpha)$ – это смещение вдоль ветра, а остальные величины в выражении постоянные. Поэтому, просуммировав значения (1) для всех участков траекторий *CA* и *BD*, получим задержку $\Delta t_2 = \dfrac{-2\upsilon l}{u^2 - \upsilon^2}$, которая совпадает с задержкой Δt_1, но имеет противоположный знак.

Значит, время движения по этим двум маршрутам одинаковое!

$$\frac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = 1.$$

Критерии оценивания

1. Указано, что $t_{AB} = t_{DC}$.	0,5 балла
2. Правильно выражено время движения на участке *AD*	1 балл
3. Правильно выражено время движения на участке *DA*	1 балл
4. Правильно найден выигрыш во времени Δt_1	1 балл
5. Найдено время движения на малых симметричных участках	4 балла
Для каждого участка:	
a) Идея векторного сложения скоростей	0,5 балла
b) Идея с проецированием на нормальную и тангенциальную оси	0,5 балла
c) Выражение для скорости самолёта через компоненты	0,5 балла
d) Выражение для времени движения	0,5 балла
6. Получено выражение [1] или аналог	1 балл
7. Правильно найдена задержка Δt_2	1 балл
8. Сделан вывод о равенстве времён движения по двум траекториям	0,5 балла

Примечание к критериям

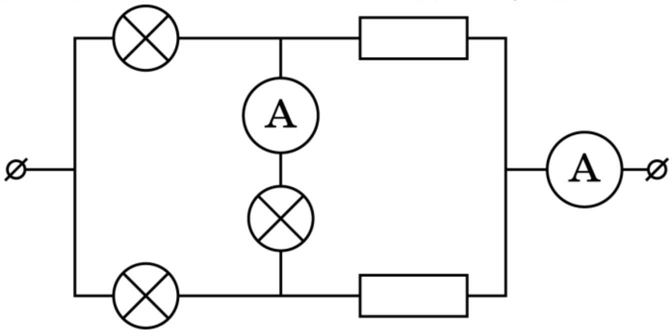
1. При неправильном решении можно поставить 1 балл по **п.5.а**, если в решении используется идея векторной суммы скоростей.

2. Если в п.7 неправильно указан знак, то балл всё равно засчитывается, ошибка будет в последнем пункте.

Нелинейный мост. Цепь изображённая на схеме состоит из трёх одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нём.

$$I = a\sqrt{U}$$

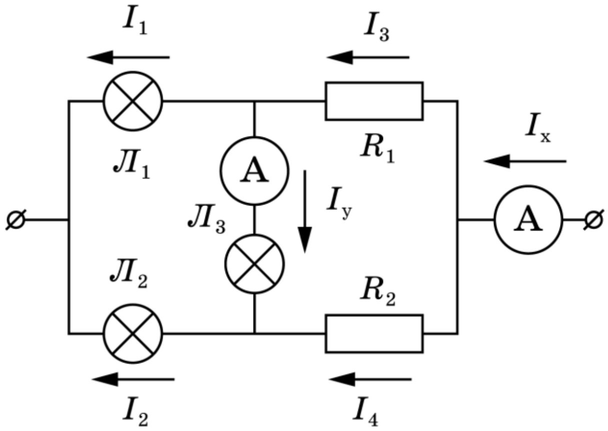
Известно, что один из амперметров показывает ток I_x, а другой I_y, причём $I_x > I_y$.



Определите силу тока в каждом из элементов схемы.

Возможное решение

Из двух заданных токов наибольший (I_x) является общим током цепи, так как это наибольший из возможных токов в данной схеме, а I_y - током в нелинейном элементе. Расставим токи в цепи.



Из ВАХ нелинейного элемента следует, что $U = \dfrac{I^2}{a^2}$

Напряжение на $Л_1$ равно $U_{Л1} = \dfrac{I_1^2}{a^2}$. С другой стороны, это напряжение равно сумме напряжений на $Л_2$ и $Л_3$: $U_{Л1} = U_{Л2} + U_{Л3} = \dfrac{I_2^2}{a^2} + \dfrac{I_y^2}{a^2}$. Дополним систему условием на сумму токов I_1 и I_2:

$$\begin{cases} \dfrac{I_1^2}{a^2} = \dfrac{I_2^2}{a^2} + \dfrac{I_y^2}{a^2} \\ I_1 + I_2 = I_x \end{cases}$$

Решаю систему получаем выражения для I_1 и I_2:

$$I_1 = \frac{I_x^2 + I_y^2}{2I_x}$$

$$I_2 = \frac{I_x^2 - I_y^2}{2I_x}$$

Токи I_3 и I_4 найдём из условия разветвления токов в узлах:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_y \\ I_2 = I_4 + I_y \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{(I_x + I_y)^2}{2I_x}$$

$$I_4 = \frac{I_x^2 - 2I_xI_y - I_y^2}{2I_x}$$

Критерии оценивания

1. Обосновано, что I_x это сила общего тока цепи, а I_y - сила тока через *Л*$_3$	1 балл
2. Получено правильное выражение для напряжения на нелинейном элементе	1 балл
3. Указано равенство падений напряжений в контуре с *Л*$_1$, *Л*$_2$ и *Л*$_3$	2 балла
4. Использовано условие разветвления токов I_1 и I_2	1 балл
5. Получено правильное выражение для I_1	1 балл
6. Получено правильное выражение для I_2	1 балл
7. Использованы условия разветвления токов I_3 и I_4	1 балл
8. Получено правильное выражение для I_3	1 балл
9. Получено правильное выражение для I_4	1 балл

Примечание к критериям

1. Правильное решение неавторским методом оценивается в 10 баллов.
2. В п.1 критериев балл ставится за объяснение какая сила тока проходит через каждый амперметр. Если токи расставлены правильно, но нет объяснения, то этот балл не ставится, но задача проверяется дальше.
3. В п.3 могут быть использованы правила Кирхгофа для контура с нелинейными элементами, рассмотрено распределение потенциалов в этом контуре или аналогичные им уравнения.
4. Для нахождения токов I_3 и I_4 может использоваться разветвление с участием I_y, так и разветвление I_x.